Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (10 Punkte) Geben Sie ein Beispiel eines 2D-dynamischen Systems, das nicht strukturell stabil ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.2 (20 Punkte) Betrachte zwei C^r-Vektorfelder f, g auf $\mathbb{R}^n$ die C^k-äquivalenz auf $\mathbb{R}^n$ sind, d.h. es gibt einen C^k-Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s.d.

$$Dh(x)f(x) = \tau(h(x))Y(h(x)),$$

wobei $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine positive Funktion die Reparametrisierung von Zeit zulässt. Es sei p ein Fixpunkt vom Fluss erzeugt von f. Zeigen Sie:

(i) $q = h(p)$ ist ein Fixpunkt vom Fluss erzeugt von g;

(ii) $Df(p) = cX^{-1}DY(q)X$ für eine $n \times n$-Matrix X und $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5.3 (20 Punkte) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ einen Fluss auf dem Torus $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert. Man bestimme für jedes σ die α- und ω-Limesmengen für alle Orbits.

Aufgabe 5.4 (10 Punkte) Geben Sie ein Bespiel eines Grandientensystems auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit nur hyperbolischen Fixpunkten und dabei hat es mindestens einen Satttel, eine Quelle und eine Senke wessen zugehörige stabile und instabile Mannigfaltigkeiten sich transversal schneiden.
Hinweis: Zwei Untermanigfaltigkeiten S, N einer Mannigfaltigkeit M schneiden sich *transversal*, wenn zu jedem Schnittpunkt $p \in S \cap N$ gilt:

$$\text{span}\{T_pS, T_pN\} = T_pM.$$

Abgabe:03.12.2012