Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (10 Punkte) Zeigen Sie die Flüße φ_t und ψ_t erzeugt von linearen Systemen $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = By$ (für zwei $n \times n$-Matrizen A, B) sind genau dann diffeomorph wenn A und B änhliche Matrizen sind.
(*Hinweis: φ_t und ψ_t sind diffeomorph wenn es h gibt s.d. $h \circ \varphi_t \circ h^{-1} = \psi_t$; A und B sind ählich wenn es H gibt s.d. $H \circ A \circ H^{-1} = B$. H ist also eine Art von "linearisiertem" h.*)

Aufgabe 3.2 (10 Punkte) Zeigen Sie zu jeder komplexen $n \times n$-Matrix A mit $\det A \neq 0$ gibt es eine komplexe Matrix B mit $e^B = A$.
(*Hinweis: da $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$ ist, kann man annehmen, dass A die Gestalt von Jordan-Blöcken hat. Sei $B = \lambda I + N$ ein Jordan-Block für einen Eigenwert λ von A. Man definiere $Q = (\log \lambda)I + S$ und $S = -\sum_{j=1}^{m} \frac{(-N)^j}{j\lambda^j}$ und zeige $e^Q = B$*)

Aufgabe 3.3 (15 Punkte) Sei $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ der Quotientenraum von $\mathbb{R}$ unter der Äquivalenzrelation: $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2\pi}$. Das heißt $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ besteht (als Menge) aus Äquivalenzklassen $[x]_\sim$, für $x \in \mathbb{R}$. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mit $p(x) = [x]_\sim$ die Projektionsabbildung. Dann ist $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ein topologischer Raum: $U \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist offen wenn $p^{-1}(U)$ in $\mathbb{R}$ offen ist.

(i) Zeigen Sie $\mathbb{R}/2\pi$ ist homöomorph zum Einheitskreis S^1 durch die Abbildung $f : \mathbb{R}/2\pi \to S^1$ mit $[x]_\sim \mapsto e^{ix}$.

(ii) Betrachte $\dot{\theta} = 1$ für $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Zeigen Sie dieser eindimensionale Fluss besitzt einen periodischen Orbit O.

(iii) Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{y} = ay, & y \in \mathbb{R}, \\ \dot{\theta} = 1, & \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Finden Sie die Fundamentalmatrix und bestimmen Sie die Stabilität des periodischen Orbits $\gamma = \{0\} \times O$ bezüglich a.

Aufgabe 3.4 (10 Punkte) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine C^2-Abbildung auf dem Einheitsintervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Betrachte das diskrete System erzeugt von $x \mapsto f(x)$ und die Stabilität von Fixpunkten $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = 1$. Zeigen Sie:

(i) ist $f''(x) > 0$ für all $x \in [0,1]$, so ist 0 ein stabiler Fixpunkt und 1 ein instabiler Fixpunkt;

(ii) ist $f''(x) < 0$ für all $x \in [0,1]$, so ist 1 ein stabiler Fixpunkt und 0 ein instabiler Fixpunkt.

(*Hinweis: ein bild sagt mehr als tausend worte.*)

Abgabe:12.11.2012