Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 2

Aufgabe 2.1 (15 Punkte) Es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein hyperbolischer Fixpunkt vom dynamischen System $\dot{x} = f(x)$, wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\bar{x}$ ist. Es seien $\varepsilon > 0$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Betrachte

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) := F_\varepsilon(x). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(i) für ausreichend kleines ε besitzt F_ε einen eindeutigen Fixpunkt $\hat{x}$ in einer Umgebung von $\bar{x}$. (*Hinweis: Satz von der impliziten Funktion.*)

(ii) für geeignetes ε ist $\hat{x}$ hyperbolisch mit

$$\dim E^s(A) = \dim E^s(B), \quad \dim E^u(A) = \dim E^u(B), \tag{2}$$

wobei $A = Df(\bar{x})$ und $B = DF_\varepsilon(\hat{x})$ sind. (*Hinweis: die Eigenwertefunktion $EW : M_{n\times n} \to \mathbb{C}^n$ mit $EW(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ ist eine stetige Funktion, die stetig von Komponenten von Matrix M abhängt. Betrachte $C = DF(\bar{x})$. Dann sind A, C bzw. B, C ausreichend nah für geeignetes ε.*)

(iii) die Flüsse erzeugt von $\dot{x} = f(x)$ und von (1) sind topologisch konjugiert. (*Hinweis: Satz von Hartman-Grobman und die Tatsache: zwei Flüsse $\phi(x,t) = e^{tA}x$ und $\psi(x,t) = e^{tB}x$ mit hyperbolischen Matrizen A, B (d.h. $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \emptyset$) sind genau dann topologisch konjugiert wenn (2) gilt.*)

Aufgabe 2.2 (10 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - (x^2+y^2)x \\ \dot{y} = x - (x^2+y^2)y \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der Fixpunkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ asymptotisch stabil ist (*Hinweis: Polarkoordinaten*). Ist (3) topologisch konjugiert mit dem linearisierten System um $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort. (*Hinweis: zeigen Sie, dass $(0,0)$ fürs linearisierten System nicht asymptotisch stabil ist.*)

Aufgabe 2.3 (10 Punkte) Es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein hyperbolischer Fixpunkt. Eine *lokale stabile Mannigfaltigkeit* in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert von

$$W^s_{loc}(\bar{x}) = \{x \in U \,:\, \varphi(t,x) \in U \text{ für } t > 0 \text{ und } \varphi(t,x) \to \bar{x} \text{ als } t \to \infty\}$$

und *globale stabile Mannigfaltigkeit* von

$$W^s(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \varphi(t,x) \to \bar{x} \text{ als } t \to \infty\}.$$

definiert. Geben Sie ein Beispiel von $\bar{x}$ (dadurch lokalen Fluss um $\bar{x}$ zu zeichnen) sodass,

(i) $W^s_{loc}(\bar{x}) \neq W^s(\bar{x}) \cap U$;

(ii) $W^s(\bar{x})$ ist keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2.4 (10 Punkte) Für einen Diffeomorphismus $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiere ein (diskretes) *dynamisches System von* G durch

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (k,x) \mapsto \varphi(k,x),$$

wobei $\varphi(k,x) = G^k(x) := \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{k \text{ Mal}}(x)$ für $k > 0$, und $\varphi(k,x) = (G^{-k}(x))^{-1}$ für $k < 0$. Es sei $\bar{x}$ ein Fixpunkt von φ. Beweisen Sie:

(i) Ist $|\lambda| < 1$ für alle Eigenwerte λ von $DG(\bar{x})$, so ist $\bar{x}$ stabil;

(ii) Ist $|\lambda| > 1$ für alle Eigenwerte λ von $DG(\bar{x})$, so ist $\bar{x}$ instabil.

Abgabe:05.11.2012