Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 11

Aufgabe 11.1 (20 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = y + o(|x|, |y|), \\ \dot{y} = o(|x|, |y|), \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie das System lässt sich transformieren in

$$\begin{cases} \dot{u} = v + au^2 \\ \dot{v} = bu^2 \end{cases} \quad + o(|u|^2, |v|^2), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

oder in

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = au^2 + buv \end{cases} \quad + o(|u|^2, |v|^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 11.2 (60 Punkte) *(Normalform für Hopf-Bifurkation)* Es sei $r \geq 3$. Betrachte ein parametrisiertes C^r-System

$$\dot{w} = f(w, \mu), \quad w \in \mathbb{R}^2,$$

vom Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Es sei $f(0, \mu) = 0$ für alle μ in einer Umgebung von $\mu_o = 0$ und

$$D_w f(0, \mu_o) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} := A.$$

Zeigen Sie, dass das System durch Koordinatentransformation in

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + a\mu x - b\mu y + a'\mu^2 x - b'\mu^2 y + (cx - dy)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + a\mu y + b\mu x + a'\mu^2 y + b'\mu^2 x + (dx + cy)(x^2 + y^2) \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

verwandeln kann, für konstante Koeffizienten $a, b, a', b', c, d \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachte das erweiterte System $\begin{cases} \dot{w} = f(w, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases}$ und eine Koordinatentransformation der Form $\begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} = H(v, \mu) = \begin{pmatrix} v + P(v, \mu) \\ \mu \end{pmatrix}$ für eine neue Variable $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es sei $L = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{3\times 3}$ und betrachte den induzierten Operator adL auf

$$H_k = \{\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{pmatrix} : P_i = P_i(x, y, \mu) \quad \text{homog. Polyn. Grad. } k\}.$$

Für $k = 2, 3$, bestimmen Sie die Dimension von H_k und die lineare Abbildung adL (Achtung: der Fall von $k = 3$ erfordert langwieriges Rechnen). Weiter zeigt man anhand der linearen Algebra, dass die Komplemente G_k von $adL(H_k)$ sind:

$$G_2 = \{a\big(\mu x\frac{\partial}{\partial x} + \mu y\frac{\partial}{\partial y}\big) + b\big(-\mu y\frac{\partial}{\partial x} + \mu x\frac{\partial}{\partial y}\big) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

und

$$G_3 = \{a'v_1 + b'v_2 + cv_3 + dv_4 : a', b', c, d \in \mathbb{R}\}$$

mit

$$\begin{cases} v_1 = \mu^2 x\frac{\partial}{\partial x} + \mu^2 y\frac{\partial}{\partial y}, \\ v_2 = -\mu^2 y\frac{\partial}{\partial x} + \mu^2 x\frac{\partial}{\partial y}, \\ v_3 = x(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} + y(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \\ v_4 = -y(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} + x(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}. \end{cases}$$

Damit begründet man die Aussage aufgrund vom Satz 2.3.3'.

Abgabe: 28.1.2013