Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 10

Aufgabe 10.1 (30 Punkte) Betrachte

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} := \Lambda x + g(x), \tag{1}$$

für $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $g = (g_1, g_2)^T = (x_1^2, x_1 x_2)^T$. Es sei

$$x = y + P(y)$$

eine Koordinatentransformation, wobei $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $P(y) = (P_1(y), P_2(y))^T$ für Polynome P_1, P_2 des Grades 2, d.h.

$$P(y) = \begin{pmatrix} a_1 y_1^2 + b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2 \\ a_2 y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{für } a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

(i) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sodass

$$\Lambda P(y) - DP(y)\Lambda y = -g(y).$$

Hinweis: Λ, P und g direkt einsetzen und Koeffizienten von beiden Seiten der Gleichung (komponentenweise) direkt vergleichen; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ erfüllt dadurch ein System der linearen Gleichungen.

(ii) Zeigen Sie durch die für (i) geeignete Koordinatentransformation wird (1)

$$\dot{y} = \Lambda y + O(|y|^3).$$

Aufgabe 9.2 (30 Punkte) Es sei H_k der reelle Vektorraum aller homogenen Polynome des Grades k in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Für

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

bestimmen Sie den linearen Operator $ad\ L : H_k \to H_k$ für $k = 2, 3$. Ist $ad\ L$ immer invertierbar?
Hinweis: bestimmen Sie zuerst die Dimension von H_2, H_3.

Abgabe: 21.1.2013