

Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 6

Es seien $X \subset L^2[-\pi, \pi]$ der Vektorraum aller geraden Funktionen in $L^2[-\pi, \pi]$ und Y der Vektorraum aller 2π -periodischen, absoluten stetigen, geraden Funktionen u mit $u' \in L^2[-\pi, \pi]$.

Aufgabe 23 (10 Punkte) Es sei $\omega \in Y$. Ist $W : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -analytische Funktion auf D mit $W|_{\partial D} = \omega' + i(1 + \mathcal{C}\omega')$, so ist $W(0) = i$, wobei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ist.

Lösung der Aufgabe 23 Mit Cauchy-Integral ist

$$W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega' + i(1 + \mathcal{C}\omega')) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(1 + \mathcal{C}\omega') dt,$$

da ω 2π -periodisch ist. Weiter ist $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{C}\omega' dt = \mathcal{C}(\int_{-\pi}^{\pi} \omega' dt) = \mathcal{C}(0) = 0$, damit ist

$$W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i dt = i.$$

Aufgabe 24 (10 Punkte) Betrachte

$$\mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')) = 0, \quad \omega \in Y, \quad (1)$$

wobei $\mathcal{C} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ der Konjugationsoperator, definiert von $\mathcal{C}(1) = 0$, $\mathcal{C}(\sin(nt)) = -\cos(nt)$ und $\mathcal{C}(\cos(nt)) = \sin(nt)$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere $G : \mathbb{R} \times Y \rightarrow X$ durch

$$G(\lambda, \omega) = \mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')), \quad (2)$$

wessen Nullstellen den Lösungen von (1) entsprechen. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{C}$ ist selbst-adjungiert in Y , im Sinne von

$$\langle \mathcal{C}u', v \rangle = \langle u, \mathcal{C}v' \rangle, \quad \forall u, v \in Y,$$

wobei $\langle x, y \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt$.

Hinweis: wenden Sie die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen an: $\langle \cos(mt), \cos(nt) \rangle = \langle \sin(mt), \sin(nt) \rangle = 0$ für $m \neq n$, $\langle \cos(mt), \sin(nt) \rangle = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) (1) ist die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$\mathcal{J}(\lambda, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega\mathcal{C}\omega' - \lambda\omega^2(1 + \mathcal{C}\omega')) dt, \quad (\lambda, \omega) \in \mathbb{R} \times Y.$$

Hinweis: zeigen Sie dadurch, dass $\nabla_Y \mathcal{J}(\lambda, \cdot) = G(\lambda, \cdot)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei ∇_Y der Gradient von $\mathcal{J}$ bezüglich des zweiten Variables $\omega \in Y$ ist.

Lösung der Aufgabe 24(i) Es gilt die folgenden Orthogonalitätsidentitäten für trigonometrische Funktionen (für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} \pi, & n = m > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi, & n = m > 0 \\ 2\pi, & n = m = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0. \quad (6)$$

Es seien

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

und

$$v(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos(mt) + d_m \sin(mt)).$$

Dann sind

$$(\mathcal{C}u')(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos(nt) + nb_n \sin(nt))$$

und

$$(\mathcal{C}v')(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m \cos(mt) + md_m \sin(mt)).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}u', v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos(nt) + nb_n \sin(nt)) \cdot \left(\frac{c_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos(mt) + d_m \sin(mt)) \right) dt \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos(nt) + nb_n \sin(nt)) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos(mt) + d_m \sin(mt)) dt \\ &\stackrel{(4)-(6)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos(nt) c_n \cos(nt) + nb_n \sin(nt) d_n \sin(nt)) dt \end{aligned}$$

und ähnlich gilt

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{C}v' \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m \cos(mt) + md_m \sin(mt)) dt \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m \cos(mt) + md_m \sin(mt)) dt \\ &\stackrel{(4)-(6)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) nc_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) nd_n \sin(nt)) dt = \langle \mathcal{C}u', v \rangle. \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 24(ii) Es seien $\omega, x \in Y$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\lambda, \omega + x) - \mathcal{J}(\lambda, \omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((\omega + x)\mathcal{C}(\omega' + x') - \lambda(\omega + x)^2(1 + \mathcal{C}(\omega' + x'))) \\
&\quad - (\omega\mathcal{C}\omega' - \lambda\omega^2(1 + \mathcal{C}\omega')) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\mathcal{C}x' + x\mathcal{C}\omega' + x\mathcal{C}x' - \lambda\omega^2\mathcal{C}x' - \lambda(2\omega x + x^2)(1 + \mathcal{C}\omega') - \lambda(2\omega x + x^2)\mathcal{C}x' dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\mathcal{C}x' + x\mathcal{C}\omega' + \underline{x\mathcal{C}x'} - \lambda\omega^2\mathcal{C}x' - 2\lambda\omega x - 2\lambda\omega x\mathcal{C}\omega' - \underline{\lambda x^2} - \underline{\lambda x^2\mathcal{C}\omega'} - \underline{2\lambda\omega x\mathcal{C}x'} - \underline{\lambda x^2\mathcal{C}x'} dt
\end{aligned}$$

wobei die unterstrichene Ausdrücke nicht x -linear sind. Weiter sind wegen (i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega\mathcal{C}x' dt = \int_{-\pi}^{\pi} x\mathcal{C}\omega' dt$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lambda\omega^2\mathcal{C}x' dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda x\mathcal{C}(\omega^2)' dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda x\mathcal{C}(2\omega\omega') dt.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\partial_{\omega} J(\lambda, \omega)x &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathcal{C}\omega' + x\mathcal{C}\omega' - 2\lambda x\mathcal{C}(\omega\omega') - 2\lambda\omega x - 2\lambda\omega x\mathcal{C}\omega' dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} x\mathcal{C}\omega' - \lambda x\mathcal{C}(\omega\omega') - \lambda\omega x - \lambda\omega x\mathcal{C}\omega' dt \\
&= \langle \mathcal{C}\omega' - \lambda\mathcal{C}(\omega\omega') - \lambda\omega - \lambda\omega\mathcal{C}\omega', x \rangle \\
&= \langle \mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')), x \rangle.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\nabla_Y \mathcal{J}(\lambda, \omega) = \mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')) = G(\lambda, \omega).$$

Aufgabe 25 (10 Punkte) Es sei G von (2) gegeben. Zeigen Sie:

(i) für $\mathcal{Q}(\omega) = \omega\mathcal{C}\omega' - \mathcal{C}(\omega\omega')$, gilt

$$G(\lambda, \omega) = (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda\mathcal{Q}(\omega) - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)\omega.$$

(ii) für $h \in Y$, gilt

$$\partial_{\omega} G(\lambda, \omega)h = (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}h' + h) + \lambda d\mathcal{Q}(\omega)h - 2\lambda h(\mathcal{C}\omega' + \omega) - \lambda h + 4\lambda\omega h - h.$$

Lösung der Aufgabe 25(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
&(1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda\mathcal{Q}(\omega) - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)\omega \\
&= (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda(\omega\mathcal{C}\omega' - \mathcal{C}(\omega\omega')) - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)\omega \\
&= \mathcal{C}\omega' + \omega - 2\lambda\omega\mathcal{C}\omega' - 2\lambda\omega^2 + \lambda\omega\mathcal{C}\omega' - \lambda\mathcal{C}(\omega\omega') - \omega + 2\lambda\omega^2 - \lambda\omega \\
&= \mathcal{C}\omega' - \lambda\omega\mathcal{C}\omega' - \lambda\mathcal{C}(\omega\omega') - \lambda\omega = G(\lambda, \omega)
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 25(ii) Für $h \in Y$, gilt

$$\begin{aligned}
& G(\lambda, \omega + h) - G(\lambda, \omega) \\
&= (1 - 2\lambda\omega - 2\lambda h)(\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}h' + \omega + h) + \lambda\mathcal{Q}(\omega + h) - (1 - 2\lambda\omega - 2\lambda h + \lambda)(\omega + h) \\
&- (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda\mathcal{Q}(\omega) - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)\omega \\
&= (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}h' + h) - 2\lambda h(\mathcal{C}\omega' + \omega) - 2\lambda h(\mathcal{C}h' + h) + \lambda(\mathcal{Q}(\omega + h) - \mathcal{Q}(\omega)) + 2\lambda h\omega \\
&+ 2\lambda h^2 - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)h,
\end{aligned}$$

wobei der h -lineare Ausdruck ist

$$\begin{aligned}
\partial_\omega G(\lambda, \omega)h &= (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}h' + h) - 2\lambda h(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda d\mathcal{Q}(\omega)h + 2\lambda h\omega - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)h \\
&= (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}h' + h) + \lambda d\mathcal{Q}(\omega)h - 2\lambda h(\mathcal{C}\omega' + \omega) - \lambda h + 4\lambda\omega h - h
\end{aligned}$$

Aufgabe 26 (15 Punkte) Ergänzen Sie den Beweis des Satzes 10.5.6: der Operator $\mathcal{Q} : Y \rightarrow L^p[-\pi, \pi]$ mit $\mathcal{Q}(\omega) = \omega\mathcal{C}\omega' - \mathcal{C}(\omega\omega')$ ist sequentiell stetig (bezüglich der schwachen Topologie in Y und der starken Topologie in L^p), dadurch die folgenden zu zeigen:

(i) konvergiert $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$ schwach in Y gegen $v \in Y$, d.h.

$$\langle v_n, y \rangle_Y \rightarrow \langle v, y \rangle_Y \rightarrow 0, \quad \forall y \in Y,$$

wobei $\langle x, y \rangle_Y = \int_{-\pi}^\pi x(t)y(t) + x'(t)y'(t)dt$, so konvergiert v'_n gegen v' in L^2 , nämlich $\|v'_n - v'\|_{L^2} \rightarrow 0$.

(ii) für $u_n(t) = \int_0^t v'_n(s) - v'(s)ds$, gilt $\mathcal{Q}(u_n) = \mathcal{Q}(v_n - v)$.

(iii) es gilt $\int_{-\pi}^\pi \mathcal{Q}(u_n)(t)dt \rightarrow 0$, als $n \rightarrow \infty$.

Lösung der Aufgabe 26(i) Es sei $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$ mit $v_n \xrightarrow{w} v$ in Y . Dann ist

$$\int_{-\pi}^\pi (v_n - v)y + (v'_n - v')y'dt \rightarrow 0, \quad \forall y \in Y,$$

als $n \rightarrow \infty$. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$, gibt es ein $N > 0$, sodass

$$|\int_{-\pi}^\pi (v_n - v)y + (v'_n - v')y'dt| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

für jedes $y \in Y$. Es gilt insbesondere für $y = v_n - v$, nämlich

$$|\int_{-\pi}^\pi (v_n - v)(v_n - v) + (v'_n - v')(v'_n - v')dt| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

und folglich ist

$$\|v'_n - v'\|_Y^2 \leq |\int_{-\pi}^\pi (v_n - v)(v_n - v) + (v'_n - v')(v'_n - v')dt| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Lösung der Aufgabe 26(ii) Da $u_n(t) = \int_0^t v'_n(s) - v'(s)ds = v_n(t) - v(t) - v_n(0) + v(0)$ ist, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(u_n)(t) &= u_n(t)\mathcal{C}u'_n(t) - \mathcal{C}(u_n u'_n)(t) \\ &= (v_n(t) - v(t))\mathcal{C}(v'_n - v') - (v_n(0) - v(0))\mathcal{C}(v'_n - v') \\ &\quad - \mathcal{C}((v_n - v)(v'_n - v')) + \mathcal{C}((v_n(0) - v(0))(v'_n - v')), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{C}((v_n(0) - v(0))(v'_n - v')) = (v_n(0) - v(0))\mathcal{C}(v'_n - v')$. Damit ist

$$\mathcal{Q}(u_n)(t) = (v_n(t) - v(t))\mathcal{C}(v'_n - v') - \mathcal{C}((v_n - v)(v'_n - v')) = \mathcal{Q}(v_n - v)(t)$$

Lösung der Aufgabe 26(iii) Wie in der Vorlesung gezeigt, haben wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{Q}(u_n)(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\mathcal{C}(v'_n - v')(t)dt.$$

Wegen (i), ist $v'_n \rightarrow v'$ in L^2 und folglich ist $(v'_n - v')$ beschränkt fast überall. Da $\mathcal{C}$ ein beschränkter Operator ist, ist dann $\mathcal{C}(v'_n - v')$ beschränkt fast überall. Es sei $C > 0$ mit $|\mathcal{C}(v'_n - v')(t)| \leq C$ für fast alle $t \in [-\pi, \pi]$. Dann gilt

$$|\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\mathcal{C}(v'_n - v')(t)dt| \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(t)|dt \leq C' \cdot \|v_n - v\|_{L^2} \cdot \|1\|_{L^2} \rightarrow 0.$$