Dr. Haibo Ruan SS 2012

Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 5

Aufgabe 20 (20 Punkte) In der Vorlesung habe wir von der Navier-Stokes-Gleichung den Model einer 2π-periodischen Stokeswelle hergeleitet, und zwar

$$\begin{cases} \Delta\hat{\psi} = 0 \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \hat{\psi} = 0 \qquad \text{auf } S_\omega \\ \nabla\hat{\psi}(x,y) \to (0,c) \quad \text{als } y \to -\infty \\ \hat{\psi}(-x,y) = \hat{\psi}(x,y) = \hat{\psi}(x+2\pi,y) \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \frac{1}{2}|\nabla\hat{\psi}(x,y)|^2 + gy \equiv \text{konst.} \qquad \text{auf } S_\omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $g > 0$ die Gravitionskonstant ist, $c > 0$ die Geschwindigkeit der Welle ist, $\Omega_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \omega(x)\}$ und $S_\omega = \{(x,\omega(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \partial\Omega_\pi$ für eine 2π-periodische Abbildung $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mit der Substitution $\hat{\psi} = c\psi$ hat das System eine "normalisierten" Form

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \psi = 0 \qquad \text{auf } S_\omega \\ \nabla\psi(x,y) \to (0,1) \quad \text{als } y \to -\infty \\ \psi(-x,y) = \psi(x,y) = \psi(x+2\pi,y) \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \frac{1}{2}|\nabla\psi(x,y)|^2 + \lambda y \equiv \frac{1}{2} \qquad \text{auf } S_\omega, \end{cases} \tag{2}$$

wobei $\lambda = \frac{g}{c^2} > 0$ ist, welches wir später als Bifurkationsparameter betrachten. Es sei $L > 0$. Betrachten Sie eine L-periodische Stokeswelle $\hat{\phi}$ mit Profil S_η für eine L-periosiche Abbildung η, die sich mit Geschwindigkeit $\bar{c} > 0$ horizontal nach links bewegt (unter Gravitation g).

(i) Bestimmen Sie den Model für $\hat{\phi}$.

(ii) Zeigen Sie $\hat{\phi}$ gibt eine 2π-periodische Stokeswelle $\hat{\psi}$ mit Profil S_ω für $\omega(x) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x)$ her, die sich mit Geschwindigkeit $c := \frac{L}{2\pi}\bar{c}$ horizontal nach links bewegt (unter Gravitation $\hat{g} = g(\frac{L}{2\pi})^3$) *Das heißt jede L-periodische Stokeswelle ist (mathmatitsch gesehen) äquivalent zu einer 2π-periodischen Stokeswelle.* (*Hinweis: Setzen Sie $\hat{\psi}(x,y) := \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y)$ in (1) ein.*)

(iii) Zeigen Sie $\hat{\phi}$ führt zu einer normalisierten Stokeswelle ϕ, für $\lambda = \frac{g}{\bar{c}^2} \cdot \frac{L}{2\pi}$ in (2).

(iv) Beschließen Sie von (ii)-(iii), dass (2) mit $\lambda = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{L}{2\pi}$ L-periodische Stokeswellen beschreibt.

Lösung der Aufgabe 20 (i) Es sei $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine L-periodische Abbildung und

$$\Omega_\eta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \eta(x)\}, \quad S_\eta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \eta(x)\}.$$

Für $\hat{\phi}$ mit Profil S_η und Geschwindigkeit $\bar{c} > 0$ gilt der Model der Bewegung:

$$\begin{cases} \Delta\hat{\phi} = 0 \quad \text{in } \Omega_\eta \\ \hat{\phi} = 0 \qquad \text{auf } S_\eta \\ \nabla\hat{\phi}(x,y) \to (0,\bar{c}) \quad \text{als } y \to -\infty \\ \hat{\phi}(-x,y) = \hat{\phi}(x,y) = \hat{\phi}(x+L,y) \quad \text{in } \Omega_\eta \\ \frac{1}{2}|\nabla\hat{\phi}(x,y)|^2 + gy \equiv \text{konst.} \qquad \text{auf } S_\eta. \end{cases} \tag{3}$$

Lösung der Aufgabe 20 (ii) Es sei $\omega(x) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x)$. Dann ist $\omega = \omega(x)$ 2π-periodisch:

$$\omega(x+2\pi) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x + L) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x) = \omega(x).$$

Weiter gilt

$$(x,y) \in \Omega_\omega \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y) \in \Omega_\eta$$

und

$$(x,y) \in S_\omega \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y) \in S_\eta$$

Definiere $\hat{\psi}(x,y) := \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y)$ für $(x,y) \in \overline{\Omega}_\omega = \Omega_\omega \cup S_\omega$. Dann ist

$$\Delta\hat{\psi}(x,y) = (\frac{L}{2\pi})^2\Delta\hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y) \overset{(3)}{=} 0, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega_\omega,$$

und

$$\hat{\psi}(x,\omega(x)) = \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}\omega(x)) = \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \eta(\frac{L}{2\pi}x)) \overset{(3)}{=} 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt

$$\nabla\hat{\psi}(x,y) = \frac{L}{2\pi}\nabla\hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y) \overset{(3)}{\to} (0, \frac{L}{2\pi}\bar{c}) := (0,c)$$

und

$$\hat{\psi}(x+2\pi,y) = \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi), \frac{L}{2\pi}y) = \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x + L, \frac{L}{2\pi}y) \overset{(3)}{=} \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y) = \hat{\psi}(x,y),$$

(ähnlich gilt $\hat{\psi}(x,y) = \hat{\psi}(-x,y)$). Schließlich ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\nabla\hat{\psi}(x,\omega(x))|^2 + \hat{g}\omega &= \frac{1}{2}(\frac{L}{2\pi})^2|\nabla\hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}\omega(x))|^2 + \hat{g}\frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x) \\ &= (\frac{L}{2\pi})^2\big(\frac{1}{2}|\nabla\hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \eta(\frac{L}{2\pi}x))|^2 + g\eta(\frac{L}{2\pi}x)\big) \\ &\overset{(3)}{\equiv} \text{konst.} \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 20 (iii) Die Substitution $\hat{\psi} = c\psi$ führt zu (2) mit

$$\lambda = \hat{g}/c^2 = g(\frac{L}{2\pi})^3/(\frac{L}{2\pi}\bar{c})^2 = \frac{g}{\bar{c}^2}\frac{L}{2\pi}.$$

Lösung der Aufgabe 20 (iv) Aus (ii)-(iii) folgt: (2) mit $\lambda = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{L}{2\pi}$ beschreibt L-periodische Stokeswellen mit Geschwindigkeit c.

Aufgabe 21 (10 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Abbildung, d.h. für $z_o \in \mathbb{C}$ existiert $f'(z_o) := \lim\limits_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$ als Grenzwert und

$$f(z) - f(z_o) = f'(z_o)(z - z_o) + o(|z - z_o|).$$

Betrachte nun f als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)), \end{aligned}$$

für $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) u, v sind differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

(ii) Ist $f'(z_o) = \alpha + i\beta$, so ist $\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Lösung der Aufgabe 21 Betrachte $f = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Nach der Definition der Ableitung ist

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_o, y_o) &= (u(x, y) - u(x_o, y_o), v(x, y) - v(x_o, y_o)) \\ &= \big(u_x(x_o, y_o)(x - x_o) + u_y(x_o, y_o)(y - y_o) + o(|(x - x_o, y - y_o)|), \\ &\quad\ v_x(x_o, y_o)(x - x_o) + v_y(x_o, y_o)(y - y_o) + o(|(x - x_o, y - y_o)|)\big). \end{aligned}$$

Es sei $f'(z_o) = \alpha + i\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(z) - f(z_o) = (\alpha + i\beta)(z - z_o) + o(|z - z_o|),$$

mit $z = x + iy$ und $z_o = x_o + iy_o$ ist es äquivalent zu

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_o, y_o) &= (\alpha + i\beta)((x - x_o) + i(y - y_o)) + o(|(x - x_o, y - y_o)|) \\ &= (\alpha(x - x_o) - \beta(y - y_o)) + i(\beta(x - x_o) + \alpha(y - y_o)) + o(|(x - x_o, y - y_o)|) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleichen der obigen gefärbten Teilen folgt

$$\begin{cases} \alpha = u_x(x_o, y_o) = v_y(x_o, y_o) \\ \beta = -u_y(x_o, y_o) = v_x(x_o, y_o) \end{cases}$$

Aufgabe 22 (15 Punkte) Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, glatte und reellwertige Abbildung mit

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

wobei $\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} u(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeffizienten sind.

(i) Zeigen Sie $u(t) = \hat{u}(0) + 2\mathrm{Re}(\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int})$.

(*Hinweis:* $u(t) \in \mathbb{R}$)

(ii) Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und definiere eine $\mathbb{C}$-analytische Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \hat{u}(0) + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)z^n := U(z) + iV(z),$$

wobei U bzw. V den reellen bzw. imaginären Teil von f entspricht. Zeigen Sie:

(iia) $u(t) = U(e^{it})$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

(iib) $\mathcal{C}u(t) = V(e^{it})$ für $t \in [-\pi, \pi]$, wobei $\mathcal{C} : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$ der Konjugationsoperator von $\mathcal{C}(1) = 0$, $\mathcal{C}(\sin(nt)) = -\cos(nt)$ und $\mathcal{C}(\cos(nt)) = \sin(nt)$ definiert ist.
(*Hinweis: man zeigt* $\mathcal{C}e^{int} = -i \cdot \mathrm{sign}(n)e^{int}$*, wobei* $\mathrm{sign}(n) = 1$ *für* $n > 0$, $\mathrm{sign}(n) = -1$ *für* $n < 0$, $\mathrm{sign}(n) = 0$ *für* $n = 0$.)

Lösung der Aufgabe 22(i) Da $u(t) \in \mathbb{R}$ ist, ist $u(t) = \overline{u(t)}$. Insbesondere ist

$$\hat{u}(-n) = \overline{\hat{u}(n)}$$

wegen der eindeutigen Darstellung von $u(t)$ durch $\hat{u}(n)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}(n)e^{int} \\ &= \hat{u}(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (\hat{u}(n)e^{int} + \overline{\hat{u}(n)e^{int}}) \\ &= \hat{u}(0) + 2\mathrm{Re}(\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int}). \end{aligned}$$

Man sieht $\hat{u}(0) \in \mathbb{R}$, da $u(t) \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung der Aufgabe 22(iia) Da

$$f(e^{it}) = \hat{u}(0) + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int}$$

ist, folgt aus (i) (und $\hat{u}(0) \in \mathbb{R}$), dass $U(e^{it}) = \mathrm{Re}f(e^{it}) = u(t)$.

Lösung der Aufgabe 22(iib) Betrachte

$$V(e^{it}) = \mathrm{Im}f(e^{it}) \overset{\hat{u}(0)\in\mathbb{R}}{=} \mathrm{Im}\big(2\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int}\big).$$

Es sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int} = \alpha + i\beta$. Dann ist

$$\begin{aligned} V(e^{it}) = 2\beta = -i(\alpha + i\beta - \overline{\alpha + i\beta}) &= -i\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int} - \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int}}\big) \\ &= -i\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)e^{int} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(-n)e^{-int}\big) = -i \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sign}(n)\hat{u}(n)e^{int}. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen $\mathcal{C}u(t) = -i \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(n)\hat{u}(n)e^{int}$, oder äquivalent zeigen wir

$$\mathcal{C}e^{int} = -i \cdot \operatorname{sign}(n)e^{int}.$$

In der Tat, ist für $n > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}e^{int} &= \mathcal{C}(\cos(nt) + i\sin(nt)) = \sin(nt) - i\cos(nt)\\ &= -i(\cos(nt) + i\sin(nt)) = -ie^{int},\end{aligned}$$

und für $n < 0$, ist $-n > 0$ und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{C}e^{int} &= \mathcal{C}(\cos(nt) + i\sin(nt)) = \mathcal{C}(\cos(-nt) - i\sin(-nt))\\ &= \sin(-nt) + i\cos(-nt) = -\sin(nt) + i\cos(nt)\\ &= i(\cos(nt) + i\sin(nt)) = ie^{int},\end{aligned}$$

und für $n = 0$ ist offensichtlich.