

Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 4

Aufgabe 18 (20 Punkte) Betrachte das Problem der Beugung eines Stabes

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda \sin \phi(x) = 0, & x \in [0, L], \\ \phi'(0) = \phi'(L) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Wie bereit in der Vorlesung gezeigt, ist jedes $(\lambda_K, 0)$ mit $\lambda_K = (\frac{K\pi}{L})^2$ für $K \in \mathbb{N}$, ein Bifurkationspunkt von (1). Folgen Sie den zusätzlichen Text vom Ausschnitt zu Blatt 4 (wobei Theorem 9.2.2 den Satz 5.2.5 in der Vorlesung entspricht) und zeigen Sie ausführlich:

- (i) Es gibt eine Kurve $\mathcal{R} = \{(\Lambda(s), \kappa(s)) : s \in [0, \infty)\}$ von verzweigenden Lösungen die aus $(\Lambda(0), \kappa(0)) = (\lambda_K, 0)$ verzweigt und

$$\|(\Lambda(s), \kappa(s))\| \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty.$$

- (ii) Für alle $(\lambda, \phi) \in \mathcal{R}$ und $\phi \neq 0$, ist $\lambda > \lambda_K$.
 (iii) Es gilt $\{\lambda : (\lambda, \phi) = (\Lambda(s), \kappa(s)), s > 0\} = (\lambda_K, \infty)$.
 (iv) Zeichnen Sie den globalen Bifurkationsdiagram für (1).

Lösung der Aufgabe 18 Es seien $X = \{\phi \in C^2[0, L] : \phi'(0) = \phi'(L) = 0\}$, $Y = C[0, L]$ und $F(\lambda, \phi) = \phi'' + \lambda \sin \phi$. Dann ist (1) äquivalent zu $F(\lambda, \phi) = 0$ für $\phi \in X$. O.B.d.A, nehmen wir $K = 1$.

Man prüft zunächst die Bedingungen (G1)-(G3) und (a)-(d) des Satzes 5.2.4 (über globale Bifurkation auf Kegelförmigem Bereich) nach.

(G1) (über triviale Lösungen) und (G3) (über Linearisierung um $(\lambda_o, 0)$ und die Transversalitätsbedingung) sind klar aus der lokalen Bifurkationsanalyse (vgl. Aufgabe 14). Für (G2) soll man zeigen $\partial_x F[\lambda, \phi]$ ist ein Fredholm-Operator mit Index 0, wenn $F(\lambda, \phi) = 0$ ist. Aus

$$\begin{aligned} F(\lambda, \phi + h) - F(\lambda, \phi) &= (\phi + h)'' + \lambda \sin(\phi + h) - \phi'' - \lambda \sin \phi \\ &= h'' + \lambda(\sin(\phi + h) - \sin \phi) = h'' + \lambda(\sin \phi \cos h + \cos \phi \sin h - \sin \phi) \\ &= h'' + \lambda h \cos \phi + o(|h|) \end{aligned}$$

folgt

$$\partial_x F[\lambda, \phi]h = h'' + \lambda h \cos \phi.$$

Es sei $(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times X$ festgewählt. Dann hat (aus der Theory der GDG) die h -lineare Differentialgleichung

$$h'' + \lambda h \cos \phi = 0$$

zwei linear unabhängige Lösungen h_1 und h_2 . Wegen der Randbedingung für Elemente aus X , gehört höchstens eine von h_1 und h_2 zu X .

Falls $h_1, h_2 \notin X$, dann hat $h'' + \lambda h \cos \phi = f$ eine eindeutige Lösung für jedes $f \in Y$. Es gilt folglich $\dim \ker \partial_x F[\lambda, \phi] = \dim \{0\} = \text{codim } Y = \text{codim } \text{range } \partial_x F[\lambda, \phi]$, also $\partial_x F[\lambda, \phi]$ ist ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Falls $h_1 \in X$, dann hat $h'' + \lambda h \cos \phi = f$ eine Lösung $h \in X$ für $f \in Y$ g.d.w.

$$\int_0^L h_1(x) f(x) dx = 0.$$

In der Tat, die Hin-Richtung folgt aus der Partiell-Integration: es sei h eine Lösung, dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^L h_1(x) f(x) dx &= \int_0^L h_1(x) (h''(x) + \lambda h(x) \cos \phi(x)) dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \int_0^L h(x) (h_1''(x) + \lambda h_1(x) \cos \phi(x)) dx \\ &= \int_0^L h(x) \cdot 0 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Die Rück-Richtung folgt aus der Variation der Parameter. Daher ist

$$\dim \ker \partial_x F[\lambda, \phi] = \dim \langle h_1 \rangle = 1 = \text{codim } \text{range } \partial_x F[\lambda, \phi],$$

also $\partial_x F[\lambda, \phi]$ ist ein Fredholm-Operator mit Index 0. Der andere Fall für $h_2 \in X$ ist vollständig analog. $\square_{(G2)}$

Definiere $\mathcal{K} \subset X$ durch

$$\mathcal{K} = \{u \in X : u(x) = -u(L-x), \, u \geq 0 \text{ auf } [0, \frac{L}{2}]\}.$$

Man sieht $\mathcal{K}$ ist ein Kegel, da $au \in \mathcal{K}$ für alle $u \in \mathcal{K}$ und $a \geq 0$. $\square_{(a)}$

Für (c), seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\hat{\xi} \in \ker \partial_x F[\lambda, 0] \cap \mathcal{K}$. Da $\ker \partial_x F[\lambda, 0] \neq \{0\}$ nur wenn $\lambda = \lambda_K$ (in welchem Fall ist $\ker \partial_x F[\lambda, 0] = \langle \xi_K \rangle$ für $\xi_K = \xi_K(x) = \cos \frac{K\pi x}{L}$) und $\xi_K \in \mathcal{K}$ nur wenn $K = 1$ ist, ist $\hat{\xi} \in \langle \xi_1 \rangle$. $\square_{(c)}$

Für (d), betrachte $(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{K} \setminus \{0\})$ mit $F(\lambda, \phi) = 0$. Wir zeigen

$$\lambda \neq 0, \quad \sin \phi(0) \neq 0, \quad \sin \phi(L) \neq 0. \quad (2)$$

Angenommen $\lambda = 0$, dann folgt aus $F(\lambda, \phi) = 0$, dass $\phi''(x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$, aber $\phi'(0) = \phi'(L) = 0$ und $\phi \in \mathcal{K}$, daher ist $\phi \equiv 0$, ein Widerspruch. Angenommen $\sin \phi(0) = 0$. Da $\phi \in \mathcal{K}$, ist $\phi(L) = -\phi(0)$ und damit ist $\sin \phi(L) = -\sin \phi(0) = 0$. Aus $F(\lambda, \phi) = 0$ und $\lambda \neq 0$ folgt $\phi''(0) = \phi''(L) = 0$, d.h. ϕ ist eine Lösung von

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda \sin \phi(x) = 0 \\ \phi'(0) = \phi'(L) = 0 \\ \phi''(0) = \phi''(L) = 0 \end{cases}$$

daraus folgt $\phi \equiv \text{konst.}$, aber $\phi \in \mathcal{K}$, folglich ist $\phi \equiv 0$, ein Widerspruch. Damit ist (2) bewiesen. Auch jede Lösung $(\hat{\lambda}, \hat{\phi})$ von $F(\lambda, \phi) = 0$ erfüllt

$$\frac{1}{2}\hat{\phi}'(x)^2 + \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(0) - \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad (3)$$

da

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}''(x) + \hat{\lambda} \sin \hat{\phi}(x) = 0 \\ \Rightarrow & \hat{\phi}''(x) \hat{\phi}(x) + \hat{\lambda} \hat{\phi}(x) \sin \hat{\phi}(x) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \hat{\phi}'(x)^2 - \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(x) \right) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \hat{\phi}'(x)^2 - \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(x) \equiv \frac{1}{2} \hat{\phi}'(0)^2 - \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(0) = -\hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(0) \end{aligned}$$

ist. Für $x = L$, wird (3)

$$\frac{1}{2} \hat{\phi}'(L)^2 + \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(0) - \hat{\lambda} \cos \hat{\phi}(L) = 0,$$

wobei $\hat{\phi}'(L) = 0$ und $\hat{\lambda} \neq 0$ falls $\hat{\phi} \neq 0$. Daher ist

$$\cos \hat{\phi}(0) = \cos \hat{\phi}(L).$$

Betrachte eine Lösung $(\hat{\lambda}, \hat{\phi})$, die nah an (λ, ϕ) liegt. Wir zeigen

$$\hat{\phi} \in \mathcal{K}.$$

Es folgt aus $\phi(0) = -\phi(L)$ und $\cos \hat{\phi}(0) = \cos \hat{\phi}(L)$, dass $\hat{\phi}(0) = -\hat{\phi}(L)$ (denn seien es $x = \hat{\phi}(0)$, $y = \hat{\phi}(L)$, $x_o = \phi(0)$ und $y_o = \phi(L)$, dann ist aus

$$\begin{cases} \cos x = \cos x_o - \sin x_o(x - x_o) + o(|x - x_o|) \\ \cos y = \cos y_o - \sin y_o(y - y_o) + o(|y - y_o|) \\ \cos x = \cos y \\ x_o = -y_o \end{cases} \quad (4)$$

folgt $\sin x_o(y + x) = 0$, aber $\sin x_o = \sin \phi(0) \neq 0$, daher ist $y + x = \hat{\phi}(L) + \hat{\phi}(0) = 0$. Damit löst $\hat{\phi} = \hat{\phi}(x)$ und $\bar{\phi} = \bar{\phi}(x) := -\hat{\phi}(L - x)$ die Gleichung $F(\hat{\lambda}, x) = 0$ mit der gleichen Randbedingung, und folglich ist $\hat{\phi} = \bar{\phi}$, d.h. $\hat{\phi}(x) = -\hat{\phi}(L - x)$. Wir zeigen noch es gibt $\varepsilon > 0$ sodass $\hat{\phi} \geq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$ für alle $|\hat{\phi} - \phi| < \varepsilon$.

Angenommen nicht, d.h. es gibt eine Folge $\{(\lambda_k, \phi_k)\} \subset \mathbb{R} \times X$ der Lösungen mit $(\lambda_k, \phi_k) \rightarrow (\lambda, \phi)$, als $k \rightarrow \infty$ sodass $\phi_k(x_k) < 0$ für ein $x_k \in [0, \frac{L}{2}]$. Da $\sin \phi(0) \neq 0$ und $\phi(0) \geq 0$ sind, ist $\phi(0) > 0$. Damit ist $\phi_k(0) > 0$ für ausreichend großes k . Außerdem ist $\phi_k(x) = -\phi_k(L - x)$ (und daher $\phi_k(\frac{L}{2}) = 0$) für ausreichend großes k (da $\phi(0) = -\phi(L)$ und $\cos \phi_k(0) = \cos \phi_k(L)$ ist). Folglich ist $x_k \in (0, \frac{L}{2})$ für alle k . O.B.d.A. x_k sei ein Minimierer von ϕ_k , d.h.

$$\phi_k(x_k) = \min\{\phi_k(x) : x \in [0, \frac{L}{2}]\} < 0.$$

Dann gilt $\phi'_k(x_k) = 0$ und $\phi_k(x_k) < 0$. Aus $\phi \geq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$ folgt $\phi(x) = \phi'(x) = 0$ für ein $x \in (0, \frac{L}{2})$ und damit ist $\phi \equiv 0$, ein Widerspruch. $\square_{(d)}$

Für (b), es sei $(\lambda, \phi) \in \mathcal{R}^+$, wobei

$$\mathcal{R}^+ = \{(\Lambda(s), s(\xi_o + \tau(s))) : s \in (0, \varepsilon)\},$$

für ein $\varepsilon > 0$ und $\Lambda(s) \rightarrow 1$, $\tau(s) \rightarrow 0$, als $s \rightarrow 0$, $\xi_o(x) = \cos \frac{\pi x}{L}$, $\xi_o(0) = 1 = -\xi_o(L)$.

Es sei $\phi_s := s(\xi_o + \tau(s))$. Da $\Lambda(s) \neq 0$ (für ausreichend kleines s) ist, ist $\phi_s(0) = -\phi_s(L)$ (mit dem gleichen Argument wie (4)), d.h.

$$s(1 + \tau(0)) = -s(-1 + \tau(s)(L)) = s(1 - \tau(s)(L)),$$

folglich ist $\tau(s)(0) = -\tau(s)(L)$ und damit ist $\phi_s(x) = -\phi_s(L - x)$. Wir zeigen noch $\phi_s \geq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$. Man sieht

$$\phi_s(\frac{L}{2}) = s(\xi_o(\frac{L}{2}) + \tau(\frac{L}{2})) = 0,$$

und für ausreichend kleines $s > 0$,

$$\frac{d}{dx}\phi_s(x)|_{x=\frac{L}{2}} = s(\frac{d}{dx}\xi_o(x) + \frac{d}{dx}\tau(s)(x))|_{x=\frac{L}{2}} = s(-\frac{\pi}{L} + \frac{d}{dx}\tau(s)(\frac{L}{2})) < 0,$$

da $\tau(s)(x) \rightarrow 0$ in X und so $\frac{d}{dx}\tau(s)(x) \rightarrow 0$ in Sup-Norm, als $s \rightarrow 0$. Daraus folgt $\phi_s \geq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$. $\square_{(b)}$

Aus dem Satz 5.2.4 folgt dann $\|\Lambda(s), \kappa(s)\| \rightarrow \infty$ als $s \rightarrow \infty$. $\square_{18(i)}$

Es sei $(\lambda, \phi) = (\Lambda(s), \kappa(s)) \in \mathcal{R}$, dann ist $\lambda > 0$ wegen der Zusammenhängigkeit von $(0, \infty)$. Aus $\phi'' + \lambda \sin \phi = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \xi_o \phi''(x) + \xi_o \lambda \sin \phi(x) dx = \int_0^L \xi_o \phi''(x) dx + \int_0^L \xi_o \lambda \sin \phi(x) dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} -(\frac{\pi}{L})^2 \int_0^L \xi_o \phi(x) dx + \int_0^L \xi_o \lambda \sin \phi(x) dx \\ &= \int_0^L \xi_o \phi(x) (-(\frac{\pi}{L})^2 + \frac{\lambda \sin \phi(x)}{\phi}) dx. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\frac{\lambda \sin \phi(x)}{\phi} \leq \lambda$ für $\lambda > 0$. Daher ist

$$\int_0^L \xi_o \phi(x) (-(\frac{\pi}{L})^2 + \lambda) dx > 0,$$

wobei $\xi_o(x)\phi(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \frac{L}{2}]$. Damit ist $\lambda > (\frac{\pi}{L})^2 = \lambda_1$. $\square_{18(ii)}$

Für (iii), zeigen wir

$$\{(\lambda, \phi) \in \mathcal{R} : \lambda \leq M\}$$

ist beschränkt für jedes endliches $M \in (\lambda_1, \infty)$. Da $\phi'(0) = 0 = \phi(\frac{L}{2})$ und

$$\phi''(\frac{L}{2}) + \lambda \sin \phi(\frac{L}{2}) = 0$$

ist, ist $\phi''(\frac{L}{2}) = 0$. Weiter folgt aus $\lambda > 0$ und $\phi \geq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$, dass $\phi''(x) \leq 0$ auf $[0, \frac{L}{2}]$. Daher ist $\phi'(x)$ fallend von $\phi'(0) = 0$ bis $\phi'(\frac{L}{2}) < 0$. Damit ist $\|\phi\|_X < \infty$. $\square_{18(iii)}$

Der Bifurkationsdiagramm sieht so aus wie in der ersten Vorlesung bezeichnet. $\square_{18(iv)}$

Aufgabe 19 (10 Punkte) Betrachte die Euler-Gleichungen

$$U_t + (U \cdot \nabla)U = \nabla P + F, \quad \nabla \cdot U = 0, \quad \nabla \times U = 0, \quad (5)$$

wobei $U : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Bewegung einer Welle (dessen Profil von $\partial\Omega$ gegeben ist) in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und um Zeit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt, $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Druck ist und $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ andere Kräfte auf die Welle beschreibt. Es sei $\Omega = \{(x, \omega(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ für ω mit $\omega(x) = \omega(-x) = \omega(x + 2\pi)$ und $\psi = \psi(x, y)$ sie die (eindeutige) Lösung (für eine positive Konstant $c > 0$) von

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & \text{für } (x, y) \in \Omega \\ \psi = 0, & \text{für } (x, y) \in \partial\Omega \\ \psi(x, y) = \psi(-x, y) = \psi(x + 2\pi, y), & \text{für } (x, y) \in \Omega \\ \nabla\psi(x, y) \rightarrow (0, c), & \text{als } y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6)$$

Zeigen Sie:

(i) $U = (\psi_y, -\psi_x)$ ist eine Lösung von (5) für $F = F(x, y) = (0, -g)$ und

$$P = P(x, y) = \frac{1}{2}|\nabla\psi(x, y)|^2 + gy.$$

(ii) Definiere einen “bewegenden Frame” durch $\Omega_t = \{(x, y) : (x + ct, y) \in \Omega\}$, $V(x, y, t) = U(x + ct, y, t) - (c, 0)$ und $Q(x, y, t) = P(x + ct, y)$, für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist V eine Lösung von (5) für $P = Q$ und $F = F(x, y) = (0, -g)$.

Lösung der Aufgabe 19 (i) Es sei $U = (\psi_y, -\psi_x)$. Dann gilt $U_t = 0$ und

$$\nabla \times U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \times (\psi_y, -\psi_x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \psi_y & -\psi_x \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \stackrel{(6)}{=} -\Delta\psi \cdot \vec{k} = 0,$$

und

$$\nabla \cdot U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (\psi_y, -\psi_x) = \psi_{xy} - \psi_{xy} = 0.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (U \cdot \nabla)U &= ((\psi_y, -\psi_x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right))U = (\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y})U \\ &= (\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y})(\psi_y, -\psi_x) = (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}, -\psi_y \psi_{xx} + \psi_x \psi_{xy}), \quad (7) \end{aligned}$$

und da $P(x, y) = \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + gy = \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_y^2) + gy$ ist, gilt

$$P_x = \psi_x\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xy} \stackrel{(6)}{=} -\psi_x\psi_{yy} + \psi_y\psi_{xy}$$

und

$$P_y = \psi_x\psi_{xy} + \psi_y\psi_{yy} + g \stackrel{(6)}{=} \psi_x\psi_{xy} - \psi_y\psi_{xx} + g.$$

Folglich ist

$$\nabla P + F_g = (P_x, P_y) + (0, -g) = (-\psi_x\psi_{yy} + \psi_y\psi_{xy}, \psi_x\psi_{xy} - \psi_y\psi_{xx}) \quad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt dann

$$U_t + (U \cdot \nabla)U = (U \cdot \nabla)U = \nabla P + F_g.$$

Lösung der Aufgabe 19 (ii) Es sei $V(x, y, t) = U(x + ct, y, t) - (c, 0)$. Offensichtlich sind $\nabla \times V = 0$ und $\nabla \cdot V = 0$. Es genügt zu prüfen

$$V_t + (V \cdot \nabla)V = \nabla Q + F_g.$$

Da $V(x, y, t) = U(x + ct, y, t) - (c, 0)$ ist, gilt $V_t(x, y, t) = cU_x(x + ct, y, t)$ und

$$\begin{aligned} (V(x, y, t) \cdot \nabla)V(x, y, t) &= ((U(x + ct, y, t) - (c, 0)) \cdot \nabla)(U(x + ct, y, t) - (c, 0)) \\ &= (U(x + ct, y, t) \cdot \nabla)U(x + ct, y, t) - \underbrace{(U(x + ct, y, t) \cdot \nabla)(c, 0)}_{=0} \\ &\quad - ((c, 0) \cdot \nabla)U(x + ct, y, t) + \underbrace{((c, 0) \cdot \nabla)(c, 0)}_{=0} \\ &= (U(x + ct, y, t) \cdot \nabla)U(x + ct, y, t) - cU_x(x + ct, y, t) \\ &= (U(x + ct, y, t) \cdot \nabla)U(x + ct, y, t) - V_t(x, y, t). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V_t(x, y, t) + (V(x, y, t) \cdot \nabla)V(x, y, t) &= (U(x + ct, y, t) \cdot \nabla)U(x + ct, y, t) \\ &\stackrel{(i)}{=} \nabla P(x + ct, y, t) + F_g = \nabla Q(x, y, t) + F_g \end{aligned}$$