Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 3

Aufgabe 13 (5 Punkte) Beweisen Sie den Satz 4.4.1 anhand des Satzes 4.3.1 in der Vorlesung.

Lösung der Aufgabe 13 Man prüft die Bedingungen des Satzes 4.3.1 nach. Es sei $L = \partial_x F[\lambda_o, 0] = \lambda_o \iota - A$. Aus der Voraussetzung dass λ_o ein einfacher Eigenwert von A ist, folgt

(s1) L ist ein Fredholm-Operator mit Index 0;

(s2) $\ker L = \langle \xi_o \rangle$ ist ein-dimensional über $\mathbb{R}$;

(s3) $\text{range} L \cap \iota(\ker L) = \{0\}$,

wobei (s1) und (s2) den ersten 2 Bedingungen vom Satz 4.3.1 entsprechen. Für die dritten Bedingung vom 4.3.1, betracht man

$$\begin{aligned}\partial^2_{\lambda,x} F[\lambda_o, 0](1, \xi_o) &= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_x F[\lambda_o + t, 0]\xi_o - \partial_x F[\lambda_o, 0]\xi_o}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{((\lambda_o + t)\iota - A)\xi_o - (\lambda_o \iota - A)\xi_o}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\xi_o}{t} = \xi_o.\end{aligned}$$

Mit (s3) hat man dann $\partial^2_{\lambda,x} F[\lambda_o, 0](1, \xi_o) = \xi_o \notin \text{range} L$. Daher folgt die Aussage aus dem Satz 4.3.1.

Aufgabe 14 (20 Punkte) Betrachte das Problem der Beugung eines Stabes

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda \sin \phi(x) = 0, \quad x \in [0, L], \\ \phi'(0) = \phi'(L) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Wie bereit in der Vorlesung gezeigt, ist jedes $(\lambda_K, 0)$ mit $\lambda_K = (\frac{K\pi}{L})^2$ für $K \in \mathbb{N}$, ein Bifurkationspunkt von (1). Genauer gesagt, es gibt eine $\mathbb{R}$-analytischen Abbildung $(\Lambda, \Phi) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ sodass

$$F(\Lambda(s), s(\varphi_K + \Phi(s))) = 0, \quad \forall\, s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{2}$$

wobei $F(\lambda, x) = x'' + \lambda \sin x$, $\varphi_K(t) = \cos \frac{K\pi t}{L}$, $\Phi(0) = 0$, $\Lambda(0) = \lambda_K$. Zeigen Sie:

(i) $\dot\Lambda(0) = \frac{d}{ds}\Lambda(s)|_{s=0} = 0$; $\ddot\Lambda(0) = \frac{d^2}{ds^2}\Lambda(s)|_{s=0} = \frac{\lambda_K}{4}$.

(ii) $\dot\Phi(0) = \frac{d}{ds}\Phi(s)|_{s=0} = c_1 \cdot \varphi_K$; $\ddot\Phi(0) = \frac{d^2}{ds^2}\Phi(s)|_{s=0} = c_2 \cdot \varphi_K - \frac{1}{96}\varphi_{3K}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, wobei $\varphi_{3K}(t) = \cos \frac{3K\pi t}{L}$.

(iii) Es gilt

$$\begin{cases} \Lambda(s) = \lambda_K + \frac{\lambda_K}{8} s^2 + o(s^2), \\ \Phi(s) = c_1 \varphi_K s + \frac{1}{2}(c_2 \cdot \varphi_K - \frac{1}{96}\varphi_{3K}) s^2 + o(s^2). \end{cases}$$

(iv) Zeichnen Sie den Bifurkationsdiagram um $(\lambda_K, 0)$ und bestimmen Sie die Stabilität der verzweigenden Lösungen.

(*Hinweis: (i) für* $\dot\Lambda(0)$*, beobachte:* (λ, x) *ist eine Lösung von (1) genaus dann, wenn* $(\lambda, -x)$ *eine Lösung ist; für* $\ddot\Lambda(0)$*, wende* $\frac{d^3}{ds^3}|_{s=0}$ *auf (2); (ii) Wende* $\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}$ *bzw.* $\frac{d^3}{ds^3}|_{s=0}$ *auf (2)*)

Lösung der Aufgabe 14 Aus den folgenden Bemerkungen

(a) (λ, x) ist eine Lösung von (1) genau dann wenn $(\lambda, -x)$ eine Lösung ist;

(b) (Λ, Φ) gibt (lokal) um $(\lambda_K, 0)$ alle Lösungen von (1) vor (vgl. Satz 4.3.1), d.h.

$$\{(\lambda, x) \in U_o \,:\, F(\lambda, x) = 0,\, x \neq 0\} = \{(\Lambda(s), \Phi(s)) \,:\, 0 < |s| < \varepsilon\}$$

folg, dass $(\Lambda(-s), \Phi(-s)) = (\Lambda(s), -\Phi(s))$ für alle $0 < s < \varepsilon$. Insbesondere ist $\Lambda(-s) = \Lambda(s)$ und damit ist

$$\dot\Lambda(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\Lambda(s) - \Lambda(-s)}{s - (-s)} = 0.$$

Um weitere Ableitungen zu erhalten, betrachte man (2) und mit $F(\lambda, x) = x'' + \lambda \sin x$ eingesetzt erhält man (sei $\varphi := \varphi_K$)

$$s(\varphi'' + \Phi(s)'') + \Lambda(s)\sin(s(\varphi + \Phi(s))) \equiv 0, \quad \forall\, s \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{3}$$

Ableitung $\frac{d}{ds}$ der beiden Seite von (3) fürht zu

$$\varphi''+\Phi(s)''+s\dot\Phi(s)''+\dot\Lambda(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s)))+\Lambda(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot\Phi(s)) = 0,$$

welches bewertet aus $s = 0$ ist

$$\varphi'' + \Phi(0)'' + \Lambda(0)(\varphi + \Phi(0)) = 0,$$

wobei $\Lambda(0) = \lambda_K$ und $\Phi(0) = 0$. Andererseits ist $\varphi'' + \lambda_K\varphi = 0$, daraus folgt $\Phi(0)'' = 0$.

Ableitung $\frac{d^2}{ds^2}$ der beiden Seite von (3) fürht zu

$$\begin{aligned}
&\dot\Phi(s)'' + \dot\Phi(s)'' + s\ddot\Phi(s)'' + \ddot\Lambda(s)\sin(s(\varphi + \Phi(s)))\\
&+ \dot\Lambda(s)\cos(s(\varphi + \Phi(s)))(\varphi + \Phi(s) + s\dot\Phi(s))\\
&+ \dot\Lambda(s)\cos(s(\varphi + \Phi(s)))(\varphi + \Phi(s) + s\dot\Phi(s))\\
&- \Lambda(s)\sin(s(\varphi + \Phi(s)))(\varphi + \Phi(s) + s\dot\Phi(s))^2\\
&+ \Lambda(s)\cos(s(\varphi + \Phi(s)))(\dot\Phi(s) + \dot\Phi(s) + s\ddot\Phi(s)) = 0.
\end{aligned}$$

Auswertung in $s = 0$ führt zu (wobei $\dot\Lambda(0) = 0$)

$$2\dot\Phi(0)'' + 2\Lambda(0)\dot\Phi(0) = 0,$$

d.h. $u = u(t) = \dot\Phi(0)$ ist eine Lösung von $u'' + \lambda_K u = 0$. Weiter zeigt man

$$u'(0) = u'(L) = 0.$$

In der Tat, da $\phi = s(\varphi + \Phi(s))$ die Randbedingung erfüllt (für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$)

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0,$$

ist $s(\varphi'(0) + \Phi(s)'(0)) = s(\varphi'(L) + \Phi(s)'(L)) = 0$. Ableitung $\frac{d}{ds}|_{s=0}$ der beiden Seite von $s(\varphi'(0) + \Phi(s)'(0)) = 0$ gibt

$$\varphi'(0) + \dot{\Phi}(0)'(0) = 0,$$

wobei $\varphi'(0) = 0$. Daher ist $\dot{\Phi}(0)'(0) = 0$ und ähnlich gilt $\dot{\Phi}(0)'(L) = 0$. Das heißt $u = u(t) = \dot{\Phi}(0)$ löst $u'' + \lambda_K u = 0$ mit $u'(0) = u'(L) = 0$. Daraus folgt

$$\dot{\Phi}(0) = c_1\varphi, \quad \text{für ein } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Ableitung $\frac{d^3}{ds^3}$ der beiden Seite von (3) fürht zu

$$\begin{aligned}
&2\dddot{\Phi}(s)'' + \ddot{\Phi}(s)'' + s\dddot{\Phi}(s)'' + \dddot{\Lambda}(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s))) \\
&+ \ddot{\Lambda}(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s)) \\
&+ 2\ddot{\Lambda}(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s)) \\
&- 2\dot{\Lambda}(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s))^2 \\
&+ 2\dot{\Lambda}(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\dot{\Phi}(s)+\dot{\Phi}(s)+s\ddot{\Phi}(s)) \\
&- \dot{\Lambda}(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s))^2 \\
&- \Lambda(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s))^3 \\
&- \Lambda(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s)))\cdot 2(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s))(\dot{\Phi}(s)+\dot{\Phi}(s)+s\ddot{\Phi}(s)) \\
&+ \dot{\Lambda}(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\dot{\Phi}(s)+\dot{\Phi}(s)+s\ddot{\Phi}(s)) \\
&- \Lambda(s)\sin(s(\varphi+\Phi(s)))(\varphi+\Phi(s)+s\dot{\Phi}(s))(\dot{\Phi}(s)+\dot{\Phi}(s)+s\ddot{\Phi}(s)) \\
&+ \Lambda(s)\cos(s(\varphi+\Phi(s)))(\ddot{\Phi}(s)+\ddot{\Phi}(s)+\ddot{\Phi}(s)+s\dddot{\Phi}(s)) = 0
\end{aligned}$$

Auswertung in $s = 0$ führt zu (wobei $\dot{\Lambda}(0) = 0$, $\Phi(0) = 0$)

$$3\ddot{\Phi}(0)'' + 3\ddot{\Lambda}(0)\varphi - \Lambda(0)\varphi^3 + 3\Lambda(0)\ddot{\Phi}(0) = 0. \tag{4}$$

Da $\varphi = \cos\frac{k\pi t}{L} := \cos\theta$ ist, ist

$$\begin{aligned}
\varphi^3 &= \cos\theta\cos^2\theta = \cos\theta\cdot\frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\cos(2\theta) \\
&= \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}(\cos\theta + \cos(3\theta)) = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(3\theta).
\end{aligned}$$

Es sei $\varphi_3 := \cos(3\theta) = \cos(\frac{3k\pi t}{L})$. Damit ist (4)

$$3\ddot{\Phi}(0)'' + 3\ddot{\Lambda}(0)\varphi - \lambda_K(\frac{3}{4}\varphi + \frac{1}{4}\varphi_3) + 3\Lambda(0)\ddot{\Phi}(0) = 0, \tag{5}$$

wobei φ orthogonal zu φ_3 (auf $[0, L]$) ist. Weiter ist φ auch orthogonal zu $\ddot{\Phi}(0)''$ und $\ddot{\Phi}(0)$, da φ orthogonal zu $\Phi(s)$ ist (für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$). Daher wird aus (5) zwei Gleichungen:

$$3\ddot{\Lambda}(0)\varphi - \frac{3}{4}\lambda_K\varphi = 0, \quad \text{und} \quad 3\ddot{\Phi}(0)'' + 3\lambda_K\ddot{\Phi}(0) = \frac{\lambda_K}{4}\varphi_3.$$

Aus der ersten folgt $\ddot{\Lambda}(0) = \frac{\lambda_K}{4}$ und aus der zweiten folgt $u = \ddot{\Phi}(0)$ ist eine Lösung von

$$\begin{cases} u'' + \lambda_K u = \frac{\lambda_K}{12}\varphi_3 \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{cases}$$

Es sei $u = u(t) = c_1 \cos(\frac{3k\pi t}{L}) + c_2 \sin(\frac{3k\pi t}{L})$ (um eine speziellen Lösung zu finden). Dann ist

$$u''(t) = -(\frac{3k\pi}{L})^2 c_1 \cos(\frac{3k\pi t}{L}) - (\frac{3k\pi}{L})^2 c_2 \sin(\frac{3k\pi t}{L})$$

und

$$\lambda_K u(t) = (\frac{k\pi}{L})^2 c_1 \cos(\frac{3k\pi t}{L}) + (\frac{k\pi}{L})^2 c_2 \sin(\frac{3k\pi t}{L})$$

und

$$\frac{\lambda_K}{12}\varphi_3 = \frac{1}{12}(\frac{k\pi}{L})^2 \cos(\frac{3k\pi t}{L}).$$

Folglich ist $c_2 = 0$ und $-9c_1 + c_1 = \frac{1}{12}$, d.h. $c_1 = -\frac{1}{96}$. Damit ist

$$\ddot{\Phi}(0) = -\frac{1}{96}\cos(\frac{3k\pi t}{L}) + c_2 \cos(\frac{k\pi t}{L}) = c_2\varphi_K - \frac{1}{96}\varphi_{3K}, \quad \text{für ein } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit sind (i) und (ii) bewiesen, und (iii) folgt aus (i)-(ii).

Der Bifurkationsdiagram ist wie in Abb. 1 (folgt vom Ausdruck von $\Lambda(s)$ um $s = 0$ und dem Satz 4.4.2), wobei der Kurve mit grüner bzw. roter Farbe gezeichnet stabil bzw. instabil ist.

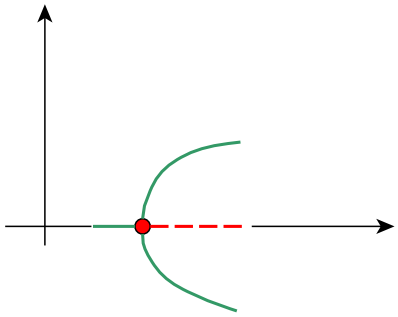

Abbildung 1: Der Bifurkationsdiagram von (1) um $(\lambda_K, 0)$.

Aufgabe 15 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass der linearer Operator $\partial_u F[0,0] : X \to Y$ vom Abschnitt 4.6 der Vorlesung, ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist und er erfüllt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung.

Lösung der Aufgabe 15 Man betrachte

$$F(0,u) - F(0,0) = \dot{u} + u^2 A(u(t), t, 0),$$

dann ist $\partial_u F[0,0]u = \dot{u}$. Es sei $L = \partial_u F[0,0]$. Dann gilt

(a) $\ker L = \{u \in X \,:\, u \equiv \text{konst.}\}$;

Ist u eine Konstantenfunktion, so ist $Lu = \dot{u} = 0$. Ist $Lu = 0$, so ist u eine Konstantenfunktion.

(b) $\text{range} L = \{v \in Y \,:\, \int_0^{2\pi} v(t)dt = 0\}$.

Ist $v \in \text{range} L$, so gibt es $u \in X$ mit $\dot{u} = v$. Da $u(0) = u(2\pi) = 0$ ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} v(t)dt = \int_0^{2\pi} \dot{u}(t)dt = u(2\pi) - u(0) = 0.$$

Ist $v \in Y$ mit $\int_0^{2\pi} v(t)dt = 0$, so ist

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)ds$$

eine Lösung für $Lu = v$ mit Randbedingungen $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$ (da $v(0) = v(2\pi)$).

(c) Es gilt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung:

$$\begin{aligned}\partial^2_{\lambda,x} F[\lambda_o, 0](1, \xi_o) &= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_x F[\lambda_o + t, 0]\xi_o - \partial_x F[\lambda_o, 0]\xi_o}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\dot{\xi}_o + t\xi_o - \dot{\xi}_o}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\xi_o}{t} = \xi_o \notin \text{range} L.\end{aligned}$$

Aufgabe 16 (10 Punkte) Es sei $O \subset \mathbb{C}^n$ eine nichtleere offene Menge und $\text{var}(O, G)$ sei eine $\mathbb{C}$-analytische Varietät, wobei G eine endliche Familie von $\mathbb{C}$-analytischen Funktionen $g : O \to \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie:

(i) $\text{var}(O, G)$ ist entweder das ganze O oder nirgendwo dicht in O.

(ii) falls $\text{var}(O, G) \subsetneq O$ und O wegzusammenhängend ist, ist $O \setminus \text{var}(O, G)$ eine wegzusammenhängende Menge.

(*Hinweis: wende den Identitätssatz für $\mathbb{C}$-analytischen Funktionen (d.h. holomorphe Funktionen): $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien $\mathbb{C}$-analytische Funktionen auf einer offenen zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ sodass $f \equiv g$ auf einer Teilmenge $S \subset U$ und S erhält einen Häufungspunkt in U, dann ist $g_1 \equiv g_2$ überall in U*)

Lösung der Aufgabe 16 (i) Eine Menge heißt *nirgendwo dicht* in X, wenn der offenen Kern des Abschluss der Menge leer ist. Es sei $\text{var}(O, G)$ nicht nirgendwo dicht, d.h. $\text{int}(\overline{\text{var}(O, G)}) \neq \emptyset$. Da $\text{var}(O, G)$ nach Definition abgeschlossen ist, gilt $\text{int}(\text{var}(O, G)) \neq \emptyset$. Dann enthält $\text{var}(O, G)$ eine nichleere offene Menge U in O. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $\mathbb{C}$-analytische Funktionen mit

$$\text{var}(O, G) = \{x \in O \,:\, g_i(x) = 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq m\}.$$

Da $U \subset \text{var}(O, G)$ ist, verschwindet g_i auf einer offenen Menge in O und daher ist $g_i \equiv 0$ für $1 \leq i \leq m$. Folglich ist $\text{var}(O, G) = O$.

Lösung der Aufgabe 16 (ii) Es seien $a, b \in O \setminus \mathrm{var}(O, G)$. Betrachte die complexe Linie

$$L = \{z = a + \lambda(b - a) \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

die durch a, b durch läuft. Wir zeigen $\mathrm{var}(O, G) \cap L$ ist eine diskrete Menge. Da $\mathrm{var}(O, G) \subsetneq O$ ist, folgt aus (i), dass es mindestens ein $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gibt mit $f_i \not\equiv 0$ in O. Da f_i $\mathbb{C}$-analytisch ist, besitzt f_i nur isolierte Nullstellen. Daher ist $\mathrm{var}(O, G) \cap L$ eine diskrete Menge und folglich gibt es einen Weg innerhalb $L \setminus \mathrm{var}(O, G)$ der a und b verbindet.

Aufgabe 17 (15 Punkte) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden $\mathbb{C}$-analytischen Varietäten:

(i) $A_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_1 z_2 = z_1 z_3 = 0\}$;

(ii) $A_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_1 z_2 = z_1 z_3 = 1\}$;

(iii) $A_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, z_2^2 = z_1^3\}$.

Lösung der Aufgabe 17 (i) Da

$$A_1 = \{(0, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\} \cup \{(z_1, 0, 0) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} := B \cup C$$

ist, ist jeder Punkt aus $B \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ein 2-regulärer Punkt von A_1 und jeder Punkt aus $C \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ein 1-regulärer Punkt von A_1. Daher ist $\dim A_1 = \max\{1, 2\} = 2$.

Lösung der Aufgabe 17 (ii) Da

$$A_2 = \{(z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z}) \,:\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

ist, ist jeder Punkt ein 1-regulärer Punkt und folglich $\dim A_2 = 1$.

Lösung der Aufgabe 17 (iii) Betrachte $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3$, eine $\mathbb{C}$-analytische Funktion von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}$. Dann ist $A_3 = f^{-1}(0)$. Da $Df(z_1, z_2) = (-3z_1^2, 2z_2)$ nirgends null in $\mathbb{C}^2$ außer $(0, 0)$ ist, ist (aus Satz der impliziten Funktionen folgend) jeder Punkt aus $A_3 \setminus \{(0, 0)\}$ ein 1-regulärer Punkt. Weiter ist $(0, 0)$ kein regulärer Punkt, da in jeder Umgebungen von $(0, 0)$ sind zwei $\mathbb{C}$-Kurven $(z_1, \pm\sqrt{z_1^3})$ vorhanden. Damit beschließen wir, dass $\dim A_3 = 1$.