Dr. Haibo Ruan SS 2012

Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 2

Aufgabe 6 (10 Punkte) Es seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$, $V \subset Y$ offene Mengen und $x_0 \in U$.

(a) (**Addition**) Sind $F, G : U \to Y$ zwei Operatoren wessen Fréchet Ableitungen $dF[x_0]$ und $dG[x_0]$ existieren, so existiert $d(F+G)[x_0]$ und

$$d(F+G)[x_0] = dF[x_0] + dG[x_0] \in \mathcal{L}(X, Y).$$

(b) (**Kettenregel**) Es seien $F : U(\subset X) \to Y$ und $G : V(\subset Y) \to Z$ sodass $F \circ G : U \to Z$ wohl-definiert ist. Existieren $dF[x_0]$ und $dG(F(x_0))$, so existiert $d(G \circ F)[x_0]$ und

$$d(G \circ F)[x_0] = dG(F(x_0)) \circ dF[x_0] \in \mathcal{L}(X, Z).$$

Lösung der Aufgabe 16 (a) Es sei $x_o \in U$ und $h \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned}(F+G)(x_o+h) - (F+G)(x_o) &= (F(x_o+h) - F(x_o)) + (G(x_o+h) - G(x_o)) \\ &= (dF[x_o]h + o(\|h\|)) + (dG[x_o]h + o(\|h\|)) \\ &= (dF[x_o] + dG[x_o])h + o(\|h\|).\end{aligned}$$

Folglich ist $d(F+G)[x_0]h = (dF[x_0] + dG[x_0])h$ für alle $h \in X$. Daher ist $d(F+G)[x_0] = dF[x_0] + dG[x_0]$ als Operatoren.

Aufgabe 7 (10 Punkte) Es seien X ein Banachraum und $\mathcal{L}(X, X)$, der Banachraum der linearen beschränkten Opertoren. Betrachte $f : \mathcal{L}(X, X) \to \mathcal{L}(X, X)$ von $f(A) = A \circ A = A^2$ definiert. Dann ist $Df[A](B) = A \circ B + B \circ A$. Was ist $Df[A](B)$ für $f(A) = A^n$, $n \in \mathbb{N}$?

Lösung der Aufgabe 7 Betrachte für $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$,

$$f(A+B) - f(A) = (A+B) \circ (A+B) - A \circ A = A \circ B + B \circ A + B \circ B,$$

wobei $A \circ B + B \circ A$ dem linearen Teil (bzg. B) entspricht und $B \circ B = o(\|B\|)$ ist. Daher ist $Df[A](B) = A \circ B + B \circ A$.

Im Allgemein gilt für $f(A) = A^n$,

$$Df[A](B) = A^{n-1} \circ B + A^{n-2} \circ B \circ A + \cdots + A \circ B \circ A^{n-2} + B \circ A^{n-1}.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Es seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X \times Y$ eine offene Menge und $(x_0, y_0) \in U$. Ist $F : U \to Z$ sodass $dF[x_0, y_0]$ existiert, so existieren $\partial_x F[x_0, y_0]$ und $\partial_y F[x_0, y_0]$ mit

$$dF[x_0, y_0](x, y) = \partial_x F[x_0, y_0]x + \partial_y F[x_0, y_0]y, \quad \forall\, (x, y) \in X \times Y.$$

Lösung der Aufgabe 8 Da $dF[x_0, y_0]$ existiert, gilt für $(s,t) \in X \times Y$,

$$F(x_0 + s, y_0 + t) - F(x_0, y_0) = dF[x_0, y_0](s,t) + o(\|(s,t)\|).$$

Nun sei $t = 0$, dann ist

$$F(x_0 + s, y_0) - F(x_0, y_0) = dF[x_0, y_0](s, 0) + o(\|s\|).$$

Aus der Definition der partiellen Ableitung folgt

$$\partial_x F[x_0, y_0]s = dF[x_0, y_0](s, 0), \quad \forall\, s \in X.$$

Ähnlich sieht man $\partial_y F[x_0, y_0]t = dF[x_0, y_0](0, t)$ für alle $t \in Y$. Daher existieren die beiden partiellen Ableitungen. Weiterhin ist für alle $(s,t) \in X \times Y$,

$$dF[x_0, y_0](s,t) = dF[x_0, y_0](s, 0) + dF[x_0, y_0](0, t) = \partial_x F[x_0, y_0]s + \partial_y F[x_0, y_0]t.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte) Es seien X, Y Banachrä um, $U \subset X$ offen und $F : U \to Y$ ein kompakter Operator sodass $dF[x_0]$ existiert für ein $x_0 \in U$. Dann ist $dF[x_0] \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter linearer Operator.

Lösung der Aufgabe 9 Es sei $\{x_n\} \subset X$ eine beschränkte Folge mit $M = \sup\{\|x_n\| \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\{x_0 + (\frac{x_n}{k})\} \subset U$ für k ausreichend groß. O.B.d.A, nehmen wir wegen der Kompaktheit von F an, dass $\{F(x_0 + (\frac{x_n}{k}))\}$ konvergiert als $n \to \infty$, für jedes festgelegten $k \in \mathbb{N}$, falls $k \leq K$ ist für eine bestimmte Ganzzahl $K > 0$. Insbesondere ist $\{F(x_0 + (\frac{x_n}{k}))\}$ eine Cauchy-Folge für jedes $k \leq K$ und folglich zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\|F(x_0 + (\frac{x_n}{k})) - F(x_0 + (\frac{x_m}{k}))\| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \forall\, m, n > N. \tag{1}$$

Wir zeigen $\{dF[x_0](x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in Y. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $dF[x_0]$ existiert, gibt es ein $\delta > 0$ sodass für alle $h \in X$ mit $\|h\| < \delta$ gilt

$$\|R(h)\| = \|F(x_0 + h) - F(x_0) - dF[x_0]h\| \leq \frac{\varepsilon \|h\|}{4M}.$$

Man merkte für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} dF[x_0]x_n - dF[x_0]x_m &= k\big(dF[x_0](\frac{x_n}{k}) - dF[x_0](\frac{x_m}{k})\big) \\ &= k\big(R(\frac{x_m}{k}) - R(\frac{x_n}{k}) + F(x_0 + \frac{x_n}{k}) - F(x_0 + \frac{x_m}{k})\big). \end{aligned}$$

Es sei $\hat{k} > 0$ mit $\hat{k} \geq K$ und $\hat{k} > \frac{M}{\delta}$. Sei $N > 0$ so gewählt dass (1) für $k = \hat{k}$ gilt. Dann gilt für $m, n > N$,

$$\begin{aligned} &\|dF[x_0]x_n - dF[x_0]x_m\| \\ &= \|\hat{k}\big(R(\frac{x_m}{\hat{k}}) - R(\frac{x_n}{\hat{k}}) + F(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}) - F(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}})\big)\| \\ &\leq \hat{k}\big(\|R(\frac{x_m}{\hat{k}})\| + \|R(\frac{x_n}{\hat{k}})\| + \|F(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}) - F(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}})\|\big) \\ &\leq \hat{k}\big(\frac{\varepsilon}{4M\hat{k}}(\|x_m\| + \|x_n\|) + \|F(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}) - F(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}})\|\big) \\ &\leq \hat{k}\frac{\varepsilon}{4M\hat{k}}(M + M) + \hat{k}\|F(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}) - F(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}})\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $\{dF[x_0](x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, daher konvergiert sie. Damit ist $dF[x_0]$ eine kompakte Operator von X nach Y.

Aufgabe 10 (10 Punkte) Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum. Zeigen Sie:

(i) $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|^2$ ist stetig differenzierbar und $\nabla f(x) = 2x$;

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|$ ist stetig differenzierbar auf $X \setminus \{0\}$ und $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in X \setminus \{0\}$.

Lösung der Aufgabe 10 (i) Betrachte für $x, h \in X$,

$$f(x+h) - f(x) = \langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle + \langle h, h\rangle.$$

Daraus folgt, dass $Df[x]h = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle = \langle 2x, h\rangle$ (da in $\mathbb{R}$, ist $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$). Aus der Definition von Grandientenoperator folgt dann $\nabla f(x) = 2x$.

Lösung der Aufgabe 10 (ii) Es sei $g(x) = \|x\|^2$, dann ist $f(x) = \sqrt{g(x)}$. Durch Kettenregel ist für $h \in X$,

$$Df[x]h = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \cdot Dg[x]h \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\|x\|} \cdot \langle 2x, h\rangle = \langle \frac{x}{\|x\|}, h\rangle,$$

daraus folgt dann $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Aufgabe 11 (5 Punkte) Es sei $F : \mathbb{F} \times X \to Y$ eine C^2-Abbildung, wobei X, Y Banachräume sind. Zeigen Sie:

$$\partial^2_{\lambda,x} F[\lambda_o, x_o](1, \xi_o) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_x F[\lambda_o + t, x_o]\xi_o - \partial_x F[\lambda_o, x_o]\xi_o}{t},$$

für alle $(\lambda_o, x_o) \in \mathbb{F} \times X$, $1 \in \mathbb{F}$, $\xi_o \in X$.

Lösung der Aufgabe 11 Da $F : \mathbb{F} \times X \to Y$ ist, ist $\partial_x F[\lambda_o, x_o] \in \mathcal{L}(X, Y)$ für $(\lambda_o, x_o) \in \mathbb{F} \times X$. Es sei $G = \partial_x F : \mathbb{F} \times X \to \mathcal{L}(X, Y)$. Da F C^2 ist, ist G C^1 und $\partial_\lambda G[\lambda_o, x_o] \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathcal{L}(X, Y))$ existiert, für alle $(\lambda_o, x_o) \in \mathbb{F} \times X$. Weiter gilt

$$\|G(\lambda_o + t, x_o) - G(\lambda_o, x_o) - \partial_\lambda G[\lambda_o, x_o]t\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = o(\|t\|),$$

d.h. für alle $\xi \in X$ gilt

$$\|G(\lambda_o + t, x_o)\xi - G(\lambda_o, x_o)\xi - \partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](t, \xi)\|_Y = o(\|t\|),$$

wobei $\partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](t, \xi) = t\partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](1, \xi)$, da $\partial_\lambda G[\lambda_o, x_o]$ ein linearer Operator von $\mathbb{F}$ nach $\mathcal{L}(X, Y)$ ist. Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0}\|\frac{G(\lambda_o + t, x_o)\xi - G(\lambda_o, x_o)\xi - t\partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](1, \xi)}{t}\|_Y = 0,$$

welches äquivalent zu

$$\lim_{t\to 0}\|\frac{G(\lambda_o + t, x_o)\xi - G(\lambda_o, x_o)\xi}{t} - \partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](1, \xi)\|_Y = 0$$

ist. Es führt dann zu

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(\lambda_o + t, x_o)\xi - G(\lambda_o, x_o)\xi}{t} = \partial_\lambda G[\lambda_o, x_o](1, \xi).$$

Aufgabe 12 (15 Punkte) Es seien $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $X = Y = \mathbb{R}$. Prüfen Sie die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung für $(\lambda_o, 0) = (0, 0)$, im Fall von

(i) $F(\lambda, x) = x(\lambda^2 + x^2)$;

(ii) $F(\lambda, x) = x(\lambda + x^2)$;

(ii) $F(\lambda, x) = x(\lambda^3 + x^3)$.

Ist $(\lambda_o, 0) = (0, 0)$ ein Bifurkationspunkt für $F(\lambda, x) = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung der Aufgabe 12 (i) Offensichtlich ist $F(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\partial_x F[\lambda, 0] = \lambda^2, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda_o = 0$, ist $L = \partial_x F[\lambda_o, 0] = 0$ ein Null-Operator von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und er hat folglich einen eindimensionalen Kern und Bild von $\{0\}$. Mit anderen Worten ist

$$\dim \ker L = 1 = \operatorname{codim} \operatorname{range} L.$$

Damit ist L ein Fredholm-Operator mit Index 0. Um die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung zu prüfen, berechnen wir $\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1, \xi_o)$ für $\xi_o = 1 \in \ker L$ durch

$$\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial_x F[t,0]1 - \partial_x F[0,0]1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 - 0}{t} = 0.$$

Da $0 \in \operatorname{range} L$ ist, gilt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung leider nicht. Andererseits ist $(0, 0)$ offenbar kein Bifurkationspunkt, da

$$F(\lambda, x) = x(\lambda^2 + x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

ist.

Lösung der Aufgabe 12 (ii) Offensichtlich ist $F(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\partial_x F[\lambda, 0] = \lambda, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda_o = 0$, ist $L = \partial_x F[\lambda_o, 0] = 0$ ein Null-Operator von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und er hat folglich einen eindimensionalen Kern und Bild von $\{0\}$. Mit anderen Worten ist

$$\dim \ker L = 1 = \operatorname{codim} \operatorname{range} L.$$

Damit ist L ein Fredholm-Operator mit Index 0. Um die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung zu prüfen, berechnen wir $\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1, \xi_o)$ für $\xi_o = 1 \in \ker L$ durch

$$\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial_x F[t,0]1 - \partial_x F[0,0]1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t - 0}{t} = 1.$$

Da $1 \notin \operatorname{range} L = \{0\}$ ist, gilt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung in diesem Fall. Mit dem Satz 4.3.1 in der Vorlesung ist $(0, 0)$ also ein Bifurkationspunkt.

Lösung der Aufgabe 12 (iii) Offensichtlich ist $F(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\partial_x F[\lambda, 0] = \lambda^3, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda_o = 0$, ist $L = \partial_x F[\lambda_o, 0] = 0$ ein Null-Operator von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und er hat folglich einen eindimensionalen Kern und Bild von $\{0\}$. Mit anderen Worten ist

$$\dim \ker L = 1 = \operatorname{codim} \operatorname{range} L.$$

Damit ist L ein Fredholm-Operator mit Index 0. Um die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung zu prüfen, berechnen wir $\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1, \xi_o)$ für $\xi_o = 1 \in \ker L$ durch

$$\partial^2_{\lambda,x} F[0,0](1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_x F[t,0]1 - \partial_x F[0,0]1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 - 0}{t} = 0.$$

Da $0 \in \operatorname{range} L = \{0\}$ ist, gilt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung in diesem Fall nicht. Trotzdem ist aber $(0,0)$ ein Bifurkationspunkt, da

$$F(\lambda, x) = x(\lambda^3 + x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -\lambda$$

ist und darum gibt es zwei unterschiedliche Folgen $\{(\frac{1}{n}, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Lösungen (zu den gleichen Werten von Parameter $\lambda_n = \frac{1}{n}$) sodass die beiden Folgen gegen $(0,0)$ konvergieren, als $n \to \infty$.