Dr. Haibo Ruan SS 2012

Lösungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$\phi''(s) + \lambda \sin \phi(s) = 0, \quad s \in [0,1],\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

die Beziehung

$$\phi'(s)^2 + 4\lambda \sin^2(\frac{\phi(s)}{2}) = 4\lambda \sin^2(\frac{\phi(0)}{2})$$

für alle $s \in [0, L]$ erfüllt.

Lösung der Aufgabe 1 Man multipliziere die Differentialgleichung mit $\phi'(s)$ und führe eine partiellen Integration durch:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \phi''(r)\phi'(r)dr + \int_0^s \lambda \sin \phi(r)\phi'(r)dr \\ &= \int_0^s \phi'(r)d\phi'(r) + \int_0^s \lambda \sin \phi(r)d\phi(r) =: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

wobei

$$I_1 = (\phi'(r))^2|_0^s - \int_0^s \phi'(s)\phi''(s)ds = (\phi'(r))^2|_0^s - I_1 \ \Rightarrow\ I_1 = \frac{1}{2}(\phi'(s))^2$$

und

$$I_2 = \int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(4\lambda \sin^2 \frac{\phi(r)}{2})dr = 2\lambda \sin^2 \frac{\phi(s)}{2} - 2\lambda \sin^2 \frac{\phi(0)}{2}.$$

Folglich gilt die Beziehung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Beweisen Sie:

(i) Jeder endlich-dimensionaler linearer Vektorraum ist mit beliebiger Norm ein Banach-Raum.
(*Hinweis:* ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $X \simeq \mathbb{F}^n$, so gibt es zu jedem $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in X$ ein $c > 0$ sodass $\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$)

(ii) Jeder endlich-dimensionaler linearer Vektorraum ist mit beliebigem inneren Produkt ein Hilbert-Raum.

Lösung der Aufgabe 2(i) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler linearer Vektorraum mit einer Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$. Nehme eine Cauchy-Folge $\{x_n\} \subset X$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon > 0$ s.d. $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$ für alle $m, k > n_\varepsilon$. Bezeichne $x_n = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} e_i$. Dann ist

$$\varepsilon > \|x_m - x_k\| = |\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)})e_i\| \geq c \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}|.$$

Daraus folgt $|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{c}$ und daher ist $\{\alpha_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{F}$. Da $\mathbb{F}$ vollständig ist, konvergiert $\{\alpha_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{F}$. Bezeichne den Grenzwert mit α_i.

Definiere $x = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$. Dann ist

$$\|x_n - x\| = |\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^{(n)} - \alpha_i) e_i\| \leq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| \|e_i\| \to 0,$$

als $n \to \infty$, da N endlich ist und $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq N$. Damit ist es bewiesen, dass jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Lösung der Aufgabe 2(ii) Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler linearer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $\| \cdot \|$ von

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall, x \in X$$

eine (von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten) Norm in X. Durch (i) ist dann $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und folglich ist $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Beweisen Sie:

(i) Der Operator $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben von $z \mapsto \bar{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Ein linearer Operator ist genau dann stetig wenn der beschränkt ist.

Lösung der Aufgabe 3(i) L ist $\mathbb{R}$-linear, da es gilt

$$L(az) = \overline{az} = a\bar{z}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

und

$$L(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = L(z_1) + L(z_2).$$

Andererseits ist L nicht $\mathbb{C}$-linear, da

$$L(iz) = \overline{iz} = -i\bar{z} = -iL(z) \neq iL(z)$$

ist.

Lösung der Aufgabe 3(ii) Wegen der Linearität, ist ein linearer Operator $L : X \to Y$ genau dann stetig, wenn der in $0 \in X$ stetig ist.

Angenommen, dass L beschränkt ist. Dann gibt es $M > 0$ sodass

$$\|Lx\| < M\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

Insbesondere für $\varepsilon > 0$ und x mit $\|x\| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ hat man

$$\|Lx\| < M \cdot \delta = \varepsilon.$$

Folglich ist L stetig in 0.

Andererseits nehmen wir an, dass L stetig ist. Ist L unbeschränkt, so existiert eine Folge $\{x_n\} \subset X$ sodass

$$\|L(x_n)\| > n\|x_n\|$$

Da $x_n \neq 0$ ist, kann man $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ definieren, wobei $\|y_n\| = \frac{1}{n}$. Daher ist $\{y_n\}$ eine gegen 0 konvergierenden Folge in X, aber

$$\|L(y_n)\| = \frac{\|L(x_n)\|}{n\|x_n\|} > 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ein Widerspruch gegen die Linearität von L in 0.

Aufgabe 4 (15 Punkte) Es seien X, Y zwei Banch-Räume. Beweisen Sie:

(i) Sind X und Y endlich-dimensional, so sind alle linearen Operatoren von X nach Y beschränkt und kompakt.

(ii) Ist Y endlich-dimensional, so sind alle linearen Operatoren von X nach Y kompakt.

(iii) Betrachte $B \in \mathcal{L}(Z, X)$, $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $C \in \mathcal{L}(Y, W)$, wobei X, Y, W, Z Banach-Räume sind. Ist K kompakt, so ist $C \circ K \circ B \in \mathcal{L}(Z, W)$ kompakt.

Lösung der Aufgabe 4(i) Es sei X bzw. Y endlich-dimensional mit Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ bzw. $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$. Dann ist jeder lineare Operator L von einer Matrix A_L dagestellt sodass für $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i \hat{e}_j$,

$$y = Lx \quad \Longleftrightarrow \quad A\alpha = \beta,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)' \in \mathbb{F}^m$ und $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)' \in \mathbb{F}^n$.

Da jede Matrix A beschränkt von $\|A\|$ ist, ist L beschränkt. Weiter ist L auch kompakt, da $\{L(x_n)\}$ beschränkt für jede beschränkten Folge $\{x_n\} \subset X$ ist, und folglich ist $\overline{\{L(x_n)\}}$ relativ kompakt, da $\dim Y < \infty$ ist.

Lösung der Aufgabe 4(ii) Diese Behauptung ist leide falsch. Es sei X ein unendlich-dimensionaler Banach-Raum mit einer Hamel-Basis $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$, d.h. für jedes $x \in X$, ist $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_{\alpha_i}$ für *endlich* viele $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}$ mit $\alpha_i \in I$. O.B.d.A, nehmen wir an, dass $\|e_\alpha\|_X = 1$ ist, für alle $\alpha \in I$.

Es sei $J \subset I$ eine abzählbare Menge und bezeichne $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$. Man definiere eine Abbildung $\mu : X \to \mathbb{R}$ dadurch Werte von $\mu(e_\alpha)$ für $\alpha \in I$ anzugeben. Es sei

$$\mu(e_\alpha) := \begin{cases} i, & \text{wenn } \alpha = \alpha_i \in J \text{ für ein } i \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und erweitere μ auf X durch Linearität. Wir zeigen μ ist nicht beschränkt. Nehme $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n = e_{\alpha_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\|x_n\| = 1$ und

$$\|\mu(x_n)\| = n,$$

daraus folgt $\|\mu\| = \sup\{\|\mu(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \infty$. Da $\{\mu(x_n)\}$ unbeschränkt in Y ist, ist die Menge auch nicht kompakt. Daher ist μ ein linearer Operator, der aber unbeschränkt und nicht kompakt ist.

Lösung der Aufgabe 4(iii) Es sei $A \subset Z$ eine beschränkte Menge in Z. Da B beschränkt ist, ist $B(A)$ wieder beschränkt in X. Da K kompakt ist, ist dann $K \circ B(A)$ eine relativ kompakte Menge in Y. Es folgt dann aus der Stetigkeit von C (da C ja beschränkt ist), dass $C \circ K \circ B(A)$ eine relativ kompakte Menge in W. Daher ist $C \circ K \circ B$ ein kompakter Operator.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $X = C^1([0,1],\mathbb{F})$ kompakt in $Y = C([0,1],\mathbb{F})$ eingebettet ist, bezüglich der Normen

$$\|f\|_Y = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\} \quad \|f\|_X = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \,:\, x \in (0,1)\}.$$

Lösung der Aufgabe 5 Wende den Satz von Ascoli-Arzela an. Es sei $\{f_n\} \subset X$ eine beschränkte Folge, d.h. es gibt ein $M > 0$ s.d.

$$\|f_n\|_{C^1} = \sup\{|f_n(x)| + |f_n'(x)| \,:\, x \in (0,1)\} < M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen die Menge $B = \{f_n\}$ ist relativ kompakt in Y.

Da $\|f_n\|_{C^1} < M$ ist, gilt

$$\|f_n\|_C = \sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in [0,1]\} \leq \|f_n\|_{C^1} < M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Weiter folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $f_n(x) - f_n(y) = f_n'(\xi)(x-y)$ für ein $\xi \in (x,y)$ (angenommen $x < y$ ist). Da $|f_n'(x)| \leq \|f_n\|_{C^1} < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt dann

$$|f_n(x) - f_n(y)| < M|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [0,1],\, n \in \mathbb{N}.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ s.d. für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$, gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| < M|x-y| < M\delta = \varepsilon.$$

Die BehauptungMit folgt dann aus dem Satz von Ascoli-Arzela.