

Übungen zu Verzweigungstheorie Blatt 6

Es seien $X \subset L^2[-\pi, \pi]$ der Vektorraum aller geraden Funktionen in $L^2[-\pi, \pi]$ und Y der Vektorraum aller 2π -periodischen, absoluten stetigen, geraden Funktionen u mit $u' \in L^2[-\pi, \pi]$.

Aufgabe 23 (10 Punkte) Es sei $\omega \in Y$. Ist $W : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -analytische Funktion auf D mit $W|_{\partial D} = \omega' + i(1 + \mathcal{C}\omega')$, so ist $W(0) = i$, wobei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 24 (10 Punkte) Betrachte

$$\mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')) = 0, \quad \omega \in Y, \quad (1)$$

wobei $\mathcal{C} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ der Konjugationsoperator, definiert von $\mathcal{C}(1) = 0$, $\mathcal{C}(\sin(nt)) = -\cos(nt)$ und $\mathcal{C}(\cos(nt)) = \sin(nt)$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere $G : \mathbb{R} \times Y \rightarrow X$ durch

$$G(\lambda, \omega) = \mathcal{C}\omega' - \lambda(\omega + \omega\mathcal{C}\omega' + \mathcal{C}(\omega\omega')), \quad (2)$$

wessen Nullstellen den Lösungen von (1) entsprechen. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{C}$ ist selbst-adjungiert in Y , im Sinne von

$$\langle \mathcal{C}u', v \rangle = \langle u, \mathcal{C}v' \rangle, \quad \forall u, v \in Y,$$

wobei $\langle x, y \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt$.

Hinweis: wenden Sie die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen an: $\langle \cos(mt), \cos(nt) \rangle = \langle \sin(mt), \sin(nt) \rangle = 0$ für $m \neq n$, $\langle \cos(mt), \sin(nt) \rangle = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) (1) ist die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$\mathcal{J}(\lambda, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega\mathcal{C}\omega' - \lambda\omega^2(1 + \mathcal{C}\omega')) dt, \quad (\lambda, \omega) \in \mathbb{R} \times Y.$$

Hinweis: zeigen Sie dadurch, dass $\nabla_Y \mathcal{J}(\lambda, \cdot) = G(\lambda, \cdot)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei ∇_Y der Gradient von $\mathcal{J}$ bezüglich des zweiten Variables $\omega \in Y$ ist.

Aufgabe 25 (10 Punkte) Es sei G von (2) gegeben. Zeigen Sie:

(i) für $\mathcal{Q}(\omega) = \omega \mathcal{C}\omega' - \mathcal{C}(\omega\omega')$, gilt

$$G(\lambda, \omega) = (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}\omega' + \omega) + \lambda\mathcal{Q}(\omega) - (1 - 2\lambda\omega + \lambda)\omega.$$

(ii) für $h \in Y$, gilt

$$\partial_\omega G(\lambda, \omega)h = (1 - 2\lambda\omega)(\mathcal{C}h' + h) + \lambda d\mathcal{Q}(\omega)h - 2\lambda h(\mathcal{C}\omega' + \omega) - \lambda h + 4\lambda\omega h - h.$$

Aufgabe 26 (10 Punkte) Ergänzen Sie den Beweis des Satzes 10.5.6: der Operator $\mathcal{Q} : Y \rightarrow L^p[-\pi, \pi]$ mit $\mathcal{Q}(\omega) = \omega \mathcal{C}\omega' - \mathcal{C}(\omega\omega')$ ist sequentiell stetig (bezüglich der schwachen Topologie in Y und der starken Topologie in L^p), dadurch die folgenden zu zeigen:

(i) konvergiert $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$ schwach in Y gegen $v \in Y$, d.h.

$$\langle v_n, y \rangle_Y \rightarrow \langle v, y \rangle_Y \rightarrow 0, \quad \forall y \in Y,$$

wobei $\langle x, y \rangle_Y = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t) + x'(t)y'(t)dt$, so konvergiert v'_n gegen v' in L^2 , nämlich $\|v'_n - v'\|_{L^2} \rightarrow 0$.

(ii) für $u_n(t) = \int_0^t v'_n(s) - v'(s)ds$, gilt $\mathcal{Q}(u_n) = \mathcal{Q}(v_n - v)$.

(iii) es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{Q}(u_n)(t)dt \rightarrow 0$, als $n \rightarrow \infty$.

Abgabe: 12.7.2012