Dr. Haibo Ruan SS 2012

Übungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 5

Aufgabe 20 (20 Punkte) In der Vorlesung habe wir von der Navier-Stokes-Gleichung den Model einer 2π-periodischen Stokeswelle hergeleitet, und zwar

$$\begin{cases} \Delta\hat{\psi} = 0 \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \hat{\psi} = 0 \qquad \text{auf } S_\omega \\ \nabla\hat{\psi}(x,y) \to (0,c) \quad \text{als } y \to -\infty \\ \hat{\psi}(-x,y) = \hat{\psi}(x,y) = \hat{\psi}(x+2\pi,y) \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \frac{1}{2}|\nabla\hat{\psi}(x,y)|^2 + gy \equiv \text{konst.} \qquad \text{auf } S_\omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $g > 0$ die Gravitionskonstant ist, $c > 0$ die Geschwindigkeit der Welle ist, $\Omega_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \omega(x)\}$ und $S_\omega = \{(x,\omega(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \partial\Omega_\pi$ für eine 2π-periodische Abbildung $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mit der Substitution $\hat{\psi} = c\psi$ hat das System eine "normalisierten" Form

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \psi = 0 \qquad \text{auf } S_\omega \\ \nabla\psi(x,y) \to (0,1) \quad \text{als } y \to -\infty \\ \psi(-x,y) = \psi(x,y) = \psi(x+2\pi,y) \quad \text{in } \Omega_\omega \\ \frac{1}{2}|\nabla\psi(x,y)|^2 + \lambda y \equiv \frac{1}{2} \qquad \text{auf } S_\omega, \end{cases} \tag{2}$$

wobei $\lambda = \frac{g}{c^2} > 0$ ist, welches wir später als Bifurkationsparameter betrachten. Es sei $L > 0$. Betrachten Sie eine L-periodische Stokeswelle $\hat{\phi}$ mit Profil S_η für eine L-periosiche Abbildung η, die sich mit Geschwindigkeit $\bar{c} > 0$ horizontal nach links bewegt (unter Gravitation g).

(i) Bestimmen Sie den Model für $\hat{\phi}$.

(ii) Zeigen Sie $\hat{\phi}$ gibt eine 2π-periodische Stokeswelle $\hat{\psi}$ mit Profil S_ω für $\omega(x) = \frac{2\pi}{L}\eta(\frac{L}{2\pi}x)$ her, die sich mit Geschwindigkeit $c := \frac{L}{2\pi}\bar{c}$ horizontal nach links bewegt (unter Gravitation $\hat{g} = g(\frac{L}{2\pi})^3$) *Das heißt jede L-periodische Stokeswelle ist (mathmatitsch gesehen) äquivalent zu einer 2π-periodischen Stokeswelle.*
(*Hinweis: Setzen Sie $\hat{\psi}(x,y) := \hat{\phi}(\frac{L}{2\pi}x, \frac{L}{2\pi}y)$ in (1) ein.*)

(iii) Zeigen Sie $\hat{\phi}$ führt zu einer normalisierten Stokeswelle ϕ, für $\lambda = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{L}{2\pi}$ in (2).

(iv) Beschließen Sie von (ii)-(iii), dass (2) mit $\lambda = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{L}{2\pi}$ L-periodische Stokeswellen beschreibt.

Aufgabe 21 (10 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Abbildung, d.h. für $z_o \in \mathbb{C}$ existiert $f'(z_o) := \lim\limits_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$ als Grenzwert und

$$f(z) - f(z_o) = f'(z_o)(z - z_o) + o(|z - z_o|).$$

Betrachte nun f als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)), \end{aligned}$$

für $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) u, v sind differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

(ii) Ist $f'(z_o) = \alpha + i\beta$, so ist $\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Aufgabe 22 (15 Punkte) Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, glatte und reellwertige Abbildung mit

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

wobei $\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} u(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeffizienten sind.

(i) Zeigen Sie $u(t) = \hat{u}(0) + 2\mathrm{Re}(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) e^{int})$.

(*Hinweis:* $u(t) \in \mathbb{R}$)

(ii) Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und definiere eine $\mathbb{C}$-analytische Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \hat{u}(0) + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) z^n := U(z) + iV(z),$$

wobei U bzw. V den reellen bzw. imaginären Teil von f entspricht. Zeigen Sie:

(iia) $u(t) = U(e^{it})$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

(iib) $\mathcal{C}u(t) = V(e^{it})$ für $t \in [-\pi, \pi]$, wobei $\mathcal{C} : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$ der Konjugationsoperator von $\mathcal{C}(1) = 0$, $\mathcal{C}(\sin(nt)) = -\cos(nt)$ und $\mathcal{C}(\cos(nt)) = \sin(nt)$ definiert ist.
(*Hinweis: man zeigt* $\mathcal{C}e^{int} = -i \cdot \operatorname{sign}(n) e^{int}$, *wobei* $\operatorname{sign}(n) = 1$ *für* $n > 0$, $\operatorname{sign}(n) = -1$ *für* $n < 0$, $\operatorname{sign}(n) = 0$ *für* $n = 0$.)

Abgabe: 28.6.2012