Dr. Haibo Ruan SS 2012

Übungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 4

Aufgabe 18 (20 Punkte) Betrachte das Problem der Beugung eines Stabes

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda \sin \phi(x) = 0, \quad x \in [0, L], \\ \phi'(0) = \phi'(L) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Wie bereit in der Vorlesung gezeigt, ist jedes $(\lambda_K, 0)$ mit $\lambda_K = (\frac{K\pi}{L})^2$ für $K \in \mathbb{N}$, ein Bifurkationspunkt von (1). Folgen Sie den zusätzlichen Text vom Ausschnitt `zu Blatt 4` (wobei Theorem 9.2.2 den Satz 5.2.5 in der Vorlesung entspricht) und zeigen Sie ausführlich:

(i) Es gibt eine Kurve $\mathcal{R} = \{(\Lambda(s), \kappa(s)) \, : \, s \in [0, \infty)\}$ von verzweigenden Lösungen die aus $(\Lambda(0), \kappa(0)) = (\lambda_K, 0)$ verzweigt und

$$\|(\Lambda(s), \kappa(s))\| \to \infty, \quad s \to \infty.$$

(ii) Für alle $(\lambda, \phi) \in \mathcal{R}$ und $\phi \neq 0$, ist $\lambda > \lambda_K$.

(iii) Es gilt $\{\lambda \, : \, (\lambda, \phi) = (\Lambda(s), \kappa(s)), s > 0\} = (\lambda_K, \infty)$.

(iv) Zeichnen Sie den globalen Bifurkationsdiagram für (1).

Aufgabe 19 (10 Punkte) Betrachte die Euler-Gleichungen

$$U_t + (U \cdot \nabla)U = \nabla P + F, \quad \nabla \cdot U = 0, \quad \nabla \times U = 0, \tag{2}$$

wobei $U : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Bewegung einer Welle (wessen Profil von $\partial\Omega$ gegeben ist) in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und um Zeit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt, $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Druck ist und $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ andere Kräfte auf die Welle beschreibt. Es sei $\Omega = \{(x, \omega(x)) \, : \, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ für ω mit $\omega(x) = \omega(-x) = \omega(x + 2\pi)$ und $\psi = \psi(x, y)$ sie die (eindeutige) Lösung (für eine positive Konstant $c > 0$) von

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \\ \psi = 0, \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega \\ \psi(x, y) = \psi(-x, y) = \psi(x + 2\pi, y), \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \\ \nabla\psi(x, y) \to (0, c), \quad \text{als } y \to -\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Zeigen Sie:

(i) $U = (\psi_y, -\psi_x)$ ist eine Lösung von (2) für $F = F(x,y) = (0,-g)$ und

$$P = P(x,y) = \frac{1}{2}|\nabla\psi(x,y)|^2 + gy.$$

(ii) Definiere einen "*bewegenden Frame*" durch $\Omega_t = \{(x,y) : (x+ct, y) \in \Omega\}$, $V(x,y,t) = U(x+ct, y, t) - (c,0)$ und $Q(x,y,t) = P(x+ct, y)$, für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist V eine Lösung von (2) für $P = Q$ und $F = F(x,y) = (0,-g)$.

Abgabe: 14.6.2012