Dr. Haibo Ruan SS 2012

Übungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 3

Aufgabe 13 (5 Punkte) Beweisen Sie den Satz 4.4.1 anhand des Satzes 4.3.1 in der Vorlesung.

Aufgabe 14 (20 Punkte) Betrachte das Problem der Beugung eines Stabes

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda \sin \phi(x) = 0, \quad x \in [0, L], \\ \phi'(0) = \phi'(L) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Wie bereit in der Vorlesung gezeigt, ist jedes $(\lambda_K, 0)$ mit $\lambda_K = (\frac{K\pi}{L})^2$ für $K \in \mathbb{N}$, ein Bifurkationspunkt von (1). Genauer gesagt, es gibt eine $\mathbb{R}$-analytischen Abbildung $(\Lambda, \Phi) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ sodass

$$F(\Lambda(s), s(\varphi_K + \Phi(s))) = 0, \quad \forall\, s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{2}$$

wobei $F(\lambda, x) = x'' + \lambda \sin x$, $\varphi_K(t) = \cos \frac{K\pi t}{L}$, $\Phi(0) = 0$, $\Lambda(0) = \lambda_K$. Zeigen Sie:

(i) $\dot{\Lambda}(0) = \frac{d}{ds}\Lambda(s)|_{s=0} = 0$; $\ddot{\Lambda}(0) = \frac{d^2}{ds^2}\Lambda(s)|_{s=0} = \frac{\lambda_K}{4}$.

(ii) $\dot{\Phi}(0) = \frac{d}{ds}\Phi(s)|_{s=0} = c_1 \cdot \varphi_K$; $\ddot{\Phi}(0) = \frac{d^2}{ds^2}\Phi(s)|_{s=0} = c_2 \cdot \varphi_K - \frac{1}{96}\varphi_{3K}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, wobei $\varphi_{3K}(t) = \cos \frac{3K\pi t}{L}$.

(iii) Es gilt

$$\begin{cases} \Lambda(s) = \lambda_K + \frac{\lambda_K}{8} s^2 + o(s^2), \\ \Phi(s) = c_1 \varphi_K s + \frac{1}{2}(c_2 \cdot \varphi_K - \frac{1}{96}\varphi_{3K}) s^2 + o(s^2). \end{cases}$$

(iv) Zeichnen Sie den Bifurkationsdiagram um $(\lambda_K, 0)$ und bestimmen Sie die Stabilität der verzweigenden Lösungen.

(*Hinweis: (i) für* $\dot{\Lambda}(0)$*, beobachte:* (λ, x) *ist eine Lösung von (1) genaus dann, wenn* $(\lambda, -x)$ *eine Lösung ist; für* $\ddot{\Lambda}(0)$*, wende* $\frac{d^3}{ds^3}|_{s=0}$ *auf (2); (ii) Wende* $\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}$ *bzw.* $\frac{d^3}{ds^3}|_{s=0}$ *auf (2))*

Aufgabe 15 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass der linearer Operator $\partial_u F[0, 0] : X \to Y$ vom Abschnitt 4.6 der Vorlesung, ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist und er erfüllt die Crandall-Rabinowitz-Transversalitätsbedingung.

Aufgabe 16 (10 Punkte) Es sei $O \subset \mathbb{C}^n$ eine nichtleere offene Menge und $\mathrm{var}(O, G)$ sei eine $\mathbb{C}$-analytische Varietät, wobei G eine endliche Familie von $\mathbb{C}$-analytischen Funktionen $g : O \to \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{var}(O, G)$ ist entweder das ganze O oder nirgendwo dicht in O.

(ii) falls $\mathrm{var}(O, G) \subsetneq O$ und O wegzusammenhängend ist, ist $O \setminus \mathrm{var}(O, G)$ eine wegzusammenhängende Menge.

(*Hinweis: wende den Identitätssatz für $\mathbb{C}$-analytischen Funktionen (d.h. holomorphe Funktionen): $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien $\mathbb{C}$-analytische Funktionen auf einer offenen zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ sodass $f \equiv g$ auf einer Teilmenge $S \subset U$ und S erhält einen Häufungspunkt in U, dann ist $g_1 \equiv g_2$ überall in U*)

Aufgabe 17 (15 Punkte) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden $\mathbb{C}$-analytischen Varietäten:

(i) $A_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_1 z_2 = z_1 z_3 = 0\}$;

(ii) $A_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, z_1 z_2 = z_1 z_3 = 1\}$;

(iii) $A_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, z_2^2 = z_1^3\}$.

Abgabe: 24.5.2012