Dr. Haibo Ruan SS 2012

Übungen zu Verzweigungstheorie

Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$\phi''(s) + \lambda \sin \phi(s) = 0, \quad s \in [0,1],\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

die Beziehung

$$\phi'(s)^2 + 4\lambda \sin^2(\frac{\phi(s)}{2}) = 4\lambda \sin^2(\frac{\phi(0)}{2})$$

für alle $s \in [0, L]$ erfüllt.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Beweisen Sie:

(i) Jeder endlich-dimensionaler linearer Vektorraum ist mit beliebiger Norm ein Banach-Raum.
(*Hinweis:* ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $X \simeq \mathbb{F}^n$, so gibt es zu jedem $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in X$ ein $c > 0$ sodass $\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$)

(ii) Jeder endlich-dimensionaler linearer Vektorraum ist mit beliebigem inneren Produkt ein Hilbert-Raum.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Beweisen Sie:

(i) Der Operator $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben von $z \mapsto \bar{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Ein linearer Operator ist genau dann stetig wenn der beschränkt ist.

Aufgabe 4 (15 Punkte) Es seien X, Y zwei Banch-Räume. Beweisen Sie:

(i) Sind X und Y endlich-dimensional, so sind alle linearen Operatoren von X nach Y beschränkt und kompakt.

(ii) Ist Y endlich-dimensional, so sind alle linearen Operatoren von X nach Y kompakt.

(iii) Betrachte $B \in \mathcal{L}(Z, X)$, $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $C \in \mathcal{L}(Y, W)$, wobei X, Y, W, Z Banach-Räume sind. Ist K kompakt, so ist $C \circ K \circ B \in \mathcal{L}(Z, W)$ kompakt.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $X = C^1([0,1],\mathbb{F})$ kompakt in $Y = C([0,1],\mathbb{F})$ eingebettet ist, bezüglich der Normen

$$\|f\|_Y = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\} \quad \|f\|_X = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \,:\, x \in (0,1)\}.$$

Abgabe: 19.4.2012