Dr. Haibo Ruan WS 2011

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 7

Aufgabe 31 (20 Punkte) Geben Sie ein Vektorfeld X auf dem 2-dimensionalen Torus T^2 sodass

(i) X strukturell stabil ist;

(ii) X strukturell instabil ist.

Hinweis: man verwende Satz von Peixoto um die Stabilität zu bestimmen.

Aufgabe 32 (20 Punkte) Geben Sie ein Vektorfeld X auf der 2-dimensionalen Sphäre S^2 sodass die nichtwandernde Menge aus 2 Punkten besteht und

(i) X Morse-Smale ist;

(ii) X nicht Morse-Smale ist.

Aufgabe 33 (30 Punkte) Es sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus gegeben von

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

sodass $\det L = 1$ und L hyperbolisch ist. Es sei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von L und $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ die entsprechenden Eigenräume. Betrachte die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ auf Torus T^2. Beweisen Sie:

(i) $L(\mathbb{Q}^2) \subset \mathbb{Q}^2$, für $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$;

(ii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}^c$ sind irrational mit $0 < \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 < 1$;

(iii) $\pi(p + E_i)$ ist dicht in T^2, für alle $p \in \mathbb{R}^2$ und $i = 1, 2$.

Aufgabe 34 (20 Punkte) Betrachte ein dynamisches System gegeben von

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. Es sei $(x_o, \lambda_o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ ein Punkt sodass $D_x f(x_o, \lambda_o)$ eine singuläre Matrix ist. Ist (x_o, λ_o) allgemein ein Bifurkationspunkt für (1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 30.1.2011