Dr. Haibo Ruan WS 2011

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 6

Aufgabe 26 (20 Punkte) Es sei $p \in \mathbb{R}^m$ ein hyperbolischer kritischer Punkt von einem Vektorfeld X in $\mathbb{R}^m$. Für eine Umgebung U von p, definiere die *lokale stabile (bzw. stabile) Mannigfaltigkeit* durch

$$\begin{aligned} W_U^s(p) &= \{x \in U \,:\, \varphi(t,x) \in U \text{ für } t > 0 \text{ und } \varphi(t,x) \to p \text{ als } t \to \infty\} \\ W^s(p) &= \{x \in \mathbb{R}^m \,:\, \varphi(t,x) \to p \text{ als } t \to \infty\}. \end{aligned}$$

Geben Sie ein Beispiel von X jeweils dafür, dass

(i) $W_U^s(p) \neq W^s(p) \cap U$;

(ii) $W^s(p)$ ist keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe 27 (10 Punkte) Geben Sie ein Beispiel vom Vektorfeld, das einen nichthyperbolischen kritischen Punkt p hat, der eine zentrale Mannigfaltigkeit W^c besitzt, woauf der Fluss von p hingezogen ist.

Aufgabe 28 (20 Punkte) Für einen Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiere ein (diskretes) *dynamisches System von* f durch

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (k,x) \mapsto \varphi(k,x),$$

wobei $\varphi(k,x) = f^k(x) := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ Mal}}(x)$ für $k > 0$, und $\varphi(k,x) = (f^{-k}(x))^{-1}$ für $k < 0$. Es sei p ein Fixpunkt von φ, d.h. $\varphi(k,x) \equiv x$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. p heißt einen *stabilen (bzw. instabilen) Fixpunkt* von φ, falls es eine Umgebung U von p gibt, sodass $\varphi(k,x) \to p$ als $k \to \infty$ (bzw. als $k \to -\infty$) für alle $x \in U$. Beweisen Sie:

(i) Ist $|\lambda| < 1$ für alle Eigenwerte λ von $Df(p)$, so ist p stabil;

(ii) Ist $|\lambda| > 1$ für alle Eigenwerte λ von $Df(p)$, so ist p instabil.

Aufgabe 29 (10 Punkte) Es seien γ ein periodischer Orbit von einem Vektorfeld X in $\mathbb{R}^m$, $p \in \gamma$ und $P : U \to P(U)$ eine Poincaré-Abbildung für p, wobei U eine Umgebung von p ist. Es sei $\hat{p} = \varphi_s(p) \in \gamma$ für ein $s \in \mathbb{R}$ und $\hat{P} : \hat{U} \to \hat{P}(\hat{U})$ eine Poincaré-Abbildung für $\hat{p}$. Beweisen Sie:

(i) $D\hat{P}(\hat{p}) = D\varphi_s(p) \cdot DP(p) \cdot D\varphi_{-s}(\hat{p})$;

(ii) $D\hat{P}(\hat{p})$ und $DP(p)$ habe die gleichen Eigenwerte.

(Die Eigenwerte von $DP(p)$ sind auch als die *Multiplikatoren* von γ gennant.)

Aufgabe 30 (30 Punkte) Es sei φ ein Fluss in $\mathbb{R}^m$. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^m$ heißt φ-*invariant*, falls $\varphi(t, x) \in S$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$. Beweisen Sie:

(i) Die nichtwandernde Menge ist φ-invariant und abgeschlossen;

(ii) Die ω-Grenzmenge (bzw. α-Grenzmenge) von x ist φ-invariant und abgeschlossen, für alle $x \in \mathbb{R}^m$;

(iii) Ein ω-Grenzpunkt (bzw. α-Grenzpunkt) von x ist nichtwandernd, für alle $x \in \mathbb{R}^m$.

Abgabe: 16.1.2011