Dr. Haibo Ruan WS 2011

Übungen zu
Dynamische Systeme
Blatt 5

Aufgabe 20 (10 Punkte) Es sei $X : U \to TU$ ein Vektorfeld ohne kritische Punkte auf einem Definitionsbereich U. Kann die Trajektorien von X auf den ganzen U rektifiziert werden (d.h. findet man immer einen Diffeomorphismus $h : U \to U$ sodass $h \circ \varphi \circ h^{-1}$ ein paralleles Vektorfeld in $\mathbb{R}^m$ ist, wobei φ der Fluss von X ist und $m = \dim U$)?
(*Hinweis:* Nach dem Rektifikationssatz ist X lokal um jeden Punkt von U "rektifizierbar". Man zeigt durch ein Beispiel, dass X im Allgemein nicht immer global rektifizierbar ist. Betrachte $\dot{x} = y$, $\dot{y} = (y-1)^2(y+1)^2$.)

Aufgabe 21 (30 Punkte) Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ Vektorfelder auf M sodass ihre erzeugten Flüsse φ und ψ lokal um $p \in M$ konjugiert sind, d.h. es gibt eine Umgebung U von p und einen C^r-Diffeomorphismus $h : U \to h(U)$ sodass $\psi(y,t) = h(\phi(h^{-1}(y),t))$ für alle $y \in h(U)$, $t \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie:

(i) X und Y sind lokal um p durch h äquivalent, d.h.

$$Y(y) = Dh(h^{-1}(y)) \cdot X(h^{-1}(y))), \quad \forall\, y \in h(U).$$

(ii) Es sei C_X (bzw. C_Y) die Menge der kritischen Punkte von X (bzw. Y). Dann ist $h(C_X \cap U) = C_Y \cap h(U)$, d.h. C_X und C_Y sind lokal um p diffeomorph.

(iii) Ein Punkt $x \in M$ heißt einen *periodischen* Punkt von X, falls es $T > 0$ gibt sodass $\varphi(x,T) = \varphi(x)$. Bezeichne P_X (bzw. P_Y) die Menge der periodischen Punkte von X (bzw. Y). Dann ist $h(P_X \cap U) = P_Y \cap h(U)$, d.h. P_X und P_Y sind lokal um p diffeomorph.

Aufgabe 22 (10 Punkte) Beweisen Sie, dass die (lokale) C^r-Konjugation der Flüsse eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 23 (10 Punkte) Es sei E ein Banach-Raum und $G : E \to E$ sei ein Isomorphismus mit $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Beweisen Sie (Id $+G$) ist ein Isomorphismus mit $\|(\text{Id} + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$.

Aufgabe 24 (20 Punkte) Ist das folgende System mit seiner Linearisierung um $(0,0)$ topologisch konjugiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x^2+y^2)x - y \\ \dot{y} = -(x^2+y^2)y + x, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(*Hinweis:* durch die Polarkoordinaten ist das System äquivalent zu $\dot{r} = -r^3$, $\dot{\theta} = 1$. Man zeigt das System besitzt keine periodische Orbits außer des stationären Punkt $(0,0)$. Andererseits berechnet man explizit die Lösungen für die linearisierte System um $(0,0)$ und zeigt es gibt unendlich viele periodischen Orbits um $(0,0)$. Wegen der Augabe 21(iii) sind dann die zwei Systeme nicht topologisch konjugiert.)

Aufgabe 25 (10 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+\lambda)y \\ \dot{y} = \frac{x^2-1}{2} - y^2, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beschreiben Sie die kritische Punkte des Systems und ihre Hyperbolizität bezüglich des Parameters λ.

Abgabe: 19.12.2011