Dr. Haibo Ruan WS 2011

# Übungen zu Dynamische Systeme

## Blatt 4

**Aufgabe 15** (10 Punkte) Es seien $M$ eine $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $S$ eine $s$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $M$ mit $s < m$.
Beweisen Sie, dass $S$ das $L$-Maß null in $M$ hat.
(*Hinweis:* Man zeigt $\mathbb{R}^s$ hat das $L$-Maß null in $\mathbb{R}^m$, für $s < m$.)

**Aufgabe 16** (20 Punkte) Beschließen Sie ob die unten gegebenen Mengen sich transversal schneiden.

(i) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ in $\mathbb{R}^n$;

(ii) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\mathbb{R}^l \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 17** (10 Punkte) Es seien $M = \mathbb{R}^2$ die $(x, y)$-Ebene, $N = \mathbb{R}$ und $S \subset M$ die $x$-Achse. Definiere $f : N \to M$ durch $f(x) = (x, x^2)$. Untersuchen Sie die Transversalität von $f$ und $S$.

**Aufgabe 18** (10 Punkte) Ergänzen Sie den Beweis von Satz 1.9.

**Aufgabe 19** (10 Punkte) Beschreiben Sie (durch Zeichnen) die Trajektorien vom System

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

*Hinweis:* es seien $x = \theta$ und $y = \frac{d\theta}{dt}$. Dann ist das System äquivalent zu

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -by + \sin x \end{cases}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Betrachten Sie und zeichnen Sie das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (y, -by + \sin x)$$

auf $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$, und anschließend skizzieren Sie die Trajektorien von $X$.

**Abgabe: 5.12.2011**