Übungen zu
Dynamische Systeme
Blatt 3

Aufgabe 10 (20 Punkte) Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Die Hessenmatrix um einen kritischen Punkt $p \in M$ von f ist definiert durch

$$H_f(p) = \big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_a(p)}\big).$$

Der Punkt p heißt *ausgeartet* (bzw. *nichtausgeartet*), wenn $H_f(p)$ die Matrix singulär (bzw. nichtsingulär) ist. Die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_f(p)$ nennt man den *Index* von p. Zeigen Sie:

(i) die Definition von Entartung ist unabhängig von der Wahl der Karten φ_α;

(ii) die Definition von Index ist unabhängig von der Wahl der Karten φ_α.

(*Hinweis:* es sei $\hat{f} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\gamma = \varphi_a \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sei ein Diffeomorphisums. Sei $\hat{p} = \varphi_\alpha(p)$ und $\bar{p} = \gamma^{-1}(\hat{p})$. Dann ist $\hat{p}$ ein kritischer Punkt von $\hat{f}$. Man zeigt

$$\big(\frac{\partial^2(\hat{f} \circ \gamma)}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j}\big|_{x=\bar{p}}\big) = D\gamma(\bar{p})^T \cdot \big(\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j}\big|_{x=\hat{p}}\big) \cdot D\gamma(\bar{p}),$$

wobei $D\gamma(\bar{p})^T$ die Transponierte von $D\gamma(\bar{p})$ bezeichnet.)

Aufgabe 11 (10 Punkte) Geben Sie (jeweils für $\lambda = 0, 1, 2$) ein Beispiel einer Höhenfunktion $f : M \to \mathbb{R}$, welche einen nichtausgearteten Punkt p mit Index λ hat, wobei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist. Ist es möglich einen nichtausgearteten Punkt mit Index 3 zu schaffen?

Aufgabe 12 (10 Punkte) Beweisen Sie jede Morsefunktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit hat nur endlich viele kritische Punkte.
(*Hinweis:* man wende das Korollar 1.7 vom Abschnitt 1.4 an.)

Aufgabe 13 (10 Punkte) Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Morsefunktion und $a \in f(M)$ ein regulärer Wert von f. Dann existiert ein offenes Intervall $I := (a', a'') \subset \mathbb{R}$ mit $a \in I$ sodass

$$f|_{f^{-1}(I)} : f^{-1}(I) \to \mathbb{R}$$

eine Submersion ist.
(*Hinweis:* wegen Korollar 1.7, ist jeder kritischer Punkt von f isoliert, daher auch jeder kritischer Wert. Folglich gibt es ein Intervall um a, das ausschließlich nur reguläre Werte enthält.)

Aufgabe 14 (10 Punkte) Es sei M eine 2-dimensionale kompakte glatte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ und $f : M \to \mathbb{R}$ die Höhefunktion. Geben Sie ein Beispiel von M sodass

(i) f insgesamt 4 kritischen Punkte, wessen Indizes $2, 1, 1, 0$ sind;

(ii) f insgesamt 6 kritischen Punkte, wessen Indizes $2, 1, 1, 1, 0, 0$ sind.
(*Hinweis:* M sei Torus oder geborgener Torus.)

Optionale Aufgabe (5 Punkte) Wäre es möglich ein Beispiel von M zu finden sodass f insgesamt 5 kritischen Punkte, wessen Indizes $2, 1, 1, 1, 0$ sind?
(*Hinweis:* wegen der Euler-Charakteristik χ für Oberfläche M_g mit Genus g, soll die Zahl

$$\chi(M_g) = \sum_i (-1)^i N_i$$

gerade sein, wobei N_i die Anzahl aller kritischen Punkte mit Index i ist.)

Abgabe: 21.11.2011