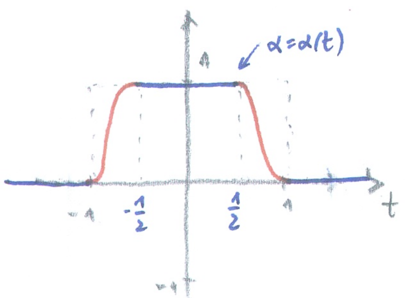
Bw vom Satz 2.12 (Hartman-Grobman)

Gegeben: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(0)=0$, $A = Df(0)$ hyperbolisch

Zu zeigen: f und A sind lokal um 0 topologisch konjugiert.

Sei $f(z) = Az + \psi(z)$, wobei $\psi(0)=0$, $D\psi(0)=0$ und $D\psi(z) = o(\|z\|)$.



Es sei $\alpha: \mathbb{R} \to [0,1]$ eine glatte Abbildung s.d.

$$\begin{cases} \alpha(t) = 1 & \forall t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \quad |t| \le \tfrac{1}{2} \\ \alpha(t) = 0 & \forall t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \quad |t| \ge 1 \\ |\alpha'(t)| \le k & \forall_{t \in \mathbb{R}} \text{ für ein } k > 1. \end{cases}$$

Definiere $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $g(z) = Az + \alpha\left(\frac{\|z\|}{\varepsilon}\right)\psi(z)$, wobei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ $g(z) = f(z)$ für $\|z\| \le \frac{\varepsilon}{2}$; $g(z) = Az$ für $\|z\| \ge \varepsilon$.

Es genügt also zu zeigen g und A sind um 0 konjugiert.

[Satz 2.14 sagt: $(A+\phi_1)$ und $(A+\phi_2)$ sind konjugiert, wenn
$\|\phi_i(z_1) - \phi_i(z_2)\| \le k\|z_1 - z_2\| \ \forall_{z_1, z_2}$, $k < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$.]

Es sei $\phi(z) = \alpha\left(\frac{\|z\|}{\varepsilon}\right)\psi(z)$. Wir zeigen: $\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| \le \varepsilon\|z_1 - z_2\|$ für $\varepsilon < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$.

Wähle $\varepsilon > 0$ s.d. $\varepsilon < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ und $\|D\psi(z)\| \le \frac{\varepsilon}{2k}$ $\forall_{\|z\| \le \varepsilon}$ [da $D\psi(z) = o(\|z\|)$.]

$$\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\le} \left\|\left(\alpha\left(\tfrac{\|z_1\|}{\varepsilon}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|z_2\|}{\varepsilon}\right)\right)\psi(z_1)\right\| + \boxed{\left\|\underbrace{\alpha\left(\tfrac{\|z_2\|}{\varepsilon}\right)}_{\|\cdot\| \le 1}\left(\psi(z_1) - \psi(z_2)\right)\right\|}$$

$$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\le} \underbrace{|\alpha'(t)|}_{\le k} \cdot \frac{\|z_1\| - \|z_2\|}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\|\psi(z_1)\|}_{\overset{\text{Mittelwert.}}{\le} \|D\psi(z)\| \cdot \|z_1\|} + \|D\psi(z)\| \cdot \|z_1 - z_2\|$$

Für $\|z_1\|, \|z_2\| \le \varepsilon$, [$\|D\psi(z)\| \le \frac{\varepsilon}{2k}$ für $\|z\| \le \varepsilon$]

$$\le k \cdot \frac{\cancel{\|z_1\| - \|z_2\|}}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2k} \underbrace{\|z_1\|}_{\le \varepsilon} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2k}}_{\le \frac{\varepsilon}{2} \ (\text{da } k>1)} \|z_1 - z_2\| \le \varepsilon(\|z_1\| - \|z_2\|)$$

Für $\|z_1\| \le \varepsilon, \|z_2\| > \varepsilon$ gilt $\boxed{} = 0$ $\left(\text{da } \alpha\left(\frac{\|z_2\|}{\varepsilon}\right) = 0\right)$ ✓; Für $\|z_1\|, \|z_2\| > \varepsilon$, ist $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0$ ✓

$\boxed{\varepsilon}$

Satz 2.12

§ 2.3.1 Verhalten um hyperbolische kritische Punkte

Aus dem Satz von Hartman-Grobman folgt, dass die lokale Dynamik um einen hyperbolischen kritischen Punkt p eines Vektorfelds X von der Dynamik des linearisierten Vektorfelds T_pX hergeleitet werden kann.

Es sei $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine hyperbolische matrix (d.h. A ist ein hyp. Isomorph.)

Dann gibt es A-invariante Unterräume $E_s, E_u \subseteq \mathbb{R}^m$, s.d.

$$(*) \qquad \mathbb{R}^m = E_s \oplus E_u \qquad \left[E_s = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ Re(\lambda)<0}} E(\lambda) \quad E_u = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ Re(\lambda)>0}} E(\lambda) \right]$$

Es seien $A_1 = A|_{E_s}$, $A_2 = A|_{E_u}$. Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x, & x \in E_s \\ \dot{y} = A_2 y & y \in E_u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x(0)\, e^{A_1 t} \\ y(t) = y(0)\, e^{A_2 t} \end{cases}$$

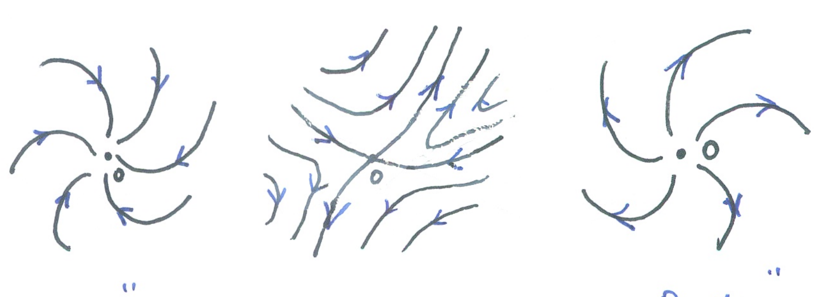
Dann ist der (von A erzeugten) Fluss φ der Form

$$\varphi(x,y,t) = (x e^{A_1 t}, y e^{A_2 t}) \quad \text{bezüglich } (*)$$

Man zeigt
$$\begin{cases} \|\varphi(x,y,t)\| < k^t \|x\| & \text{für } (x,y) \in E_s \\ \|\varphi(x,y,t)\| > K^t \|y\| & \text{für } (x,y) \in E_u \end{cases} \quad \text{für gewisse } 0<k<1<K.$$

$\Rightarrow$ ~~φ ist~~ anziehend längs E_s und abstoßend längs E_u.

Beispiele:



„Senke" $E_u = \{0\}$ — Sattel — „Quelle" $E_s = \{0\}$

§ 2.3.2 Verhalten um nichthyperbolische kritische Punkte

Um einen nichthyperbolischen kritischen Punkt p ist X im Allgemein nicht topologisch konjugiert mit T_pX.

Es sei p ein nichthyperbolischer kritischer Punkt von X,

d.h. $\quad \sigma(DX(p)) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$

Fall 1 : $\quad 0 \in \sigma(DX(p))$

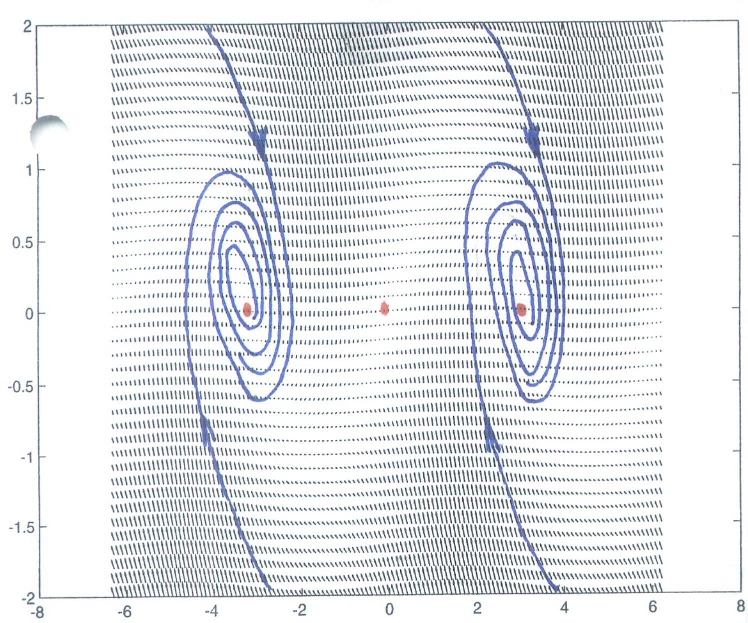
Betrachte $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben von

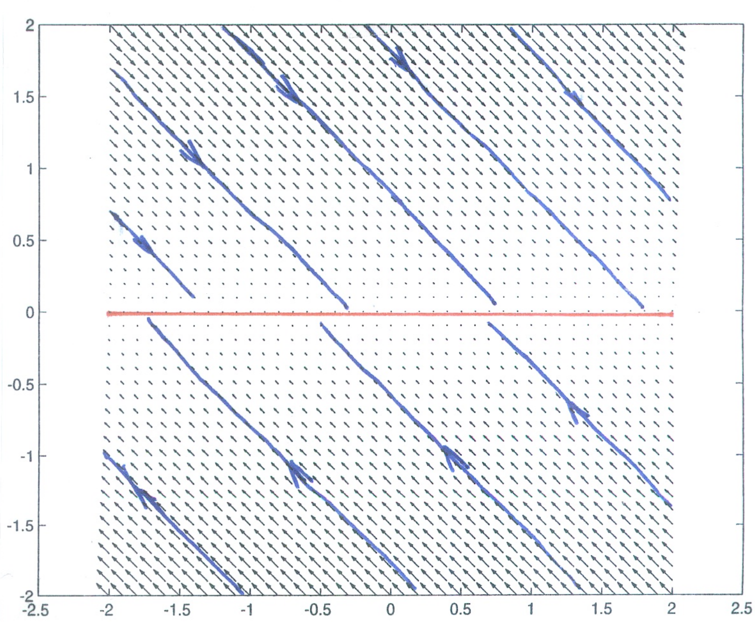
$$(N) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + \sin x \end{cases} \xrightarrow[\text{um } p=(0,0)]{\text{Linearisierung}} (L) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

[(0,0) ist ein kri. Punkt]

Hag

(N) und (L) sind nicht topo. konjugiert um (0,0)





Ist $\varphi, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (lokal) konjugiert, so gibt es (lokal) Homöom. $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ s.d.

$$\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1} \quad \text{(lokal)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = x \iff \psi(h(x)) = h(x), \quad \text{d.h.} \quad \underbrace{\{x : \varphi(x) = x\}}_{\text{Fixpunkte von } \varphi} \underset{\text{(lokal)}}{\cong} \underbrace{\{y : \psi(y) = y\}}_{\text{Fixpunkte von } \psi} \text{ homöom.}$$