Kurz gesagt besagt der Rektifikationssatz eine „Äquivalenz" zwischen die Flüsse lokal um einen reg. Punkt und die parallele Flüsse in $\mathbb{R}^m$.

Formal formuliert,

Def. 2.10 Es seien $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$. Wir sagen X und Y sind lokal C^r-äquivalent um $p \in M$, falls es eine Umgebung U von p und einen C^r-Diffeomorphismus $h: U \to U$ gibt, s.d.

$$Y(\bar{p}) = Dh^{-1}(h(\bar{p}))\, X(h(\bar{p})) \qquad \forall_{\bar{p} \in U}$$

Es sei φ bzw. ψ der von X bzw. Y erzeugten Fluss. Wir sagen φ und ψ sind lokal C^r-konjugiert um $p \in M$, falls es einen C^r-Diffeom. $h: U \to h(U) \subset M$ und eine Umgeb. U von p gibt, s.d.

$$\psi_t = h \circ \varphi_t \circ h^{-1} \qquad \forall_{t \in \mathbb{R}}$$

Im Fall $r=0$, nennt man φ, ψ seien topologisch konjugiert.

Man zeigt :
- C^r-konjugierte Flüsse φ, ψ $\Rightarrow$ C^r-äquivalente Vektorfelder X, Y (~~Hag~~)
- C^r-Konjugation ist eine Äquivalenzrelation. Hag.

§ 2.3 Verhalten um Kritische Punkte

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ (kompakt), $p \in M$ sei ein kritischer Punkt von X,

$\varphi: M \times \mathbb{R} \to M$ sei der Fluss von X.

p kritisch von X $\Rightarrow$ p ist ein stationärer Punkt von φ,

$\varphi_t: M \to M$ Diffeom. d.h. $\varphi_p(t) \equiv \varphi_p(0) = p \quad \forall_{t \in \mathbb{R}}$

$\leadsto T_p\varphi_t : T_pM \to T_{\underset{= \varphi_t(p)}{p}}M$ ist ein linearer Isomorphismus, $\forall_{t \in \mathbb{R}}$

D.h. $\{T_p\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ ist ein Fluss auf $T_pM \cong \mathbb{R}^m$, welchen

$$T_p\varphi_t \circ T_p\varphi_s = T_p(\varphi_t \circ \varphi_s) = T_p\varphi_{t+s}$$

wir als den linearisierten Fluss von φ um p.

Weiter gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) = X(\varphi(x,t)) \qquad \forall_{x \in M}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ beide Seite:
$$\frac{\partial}{\partial t} D\varphi(x,t) = DX(\varphi(x,t))\, D\varphi(x,t)$$

$x = p$
$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{D\varphi(p,t)}_{= T_p\varphi_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m} = DX(p)\, D\varphi(p,t)$$

$\Rightarrow$ Der linearisierte Fluss $\{T_p\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ von φ um p

ist vom linearisierten Vektorfeld $\underset{\cong \mathbb{R}^m}{T_pM} \to \underset{\cong \mathbb{R}^m}{T_pM}$, $v \mapsto DX(p)\cdot v$ erzeugt.

Der Satz von Hartman-Grobman besagt, dass der Fluss φ von X und der linearisierte Fluss $T_p\varphi$ von $DX(p)$ um einen „hyperbolischen" kritischen Punkt p topologisch Konjugiert sind.

<u>Satz 2.11</u> Es sei $X \in \mathcal{X}^r(M)$ und φ der Fluss von X. Es sei $p \in M$ ein hyperbolischer kritischer Punkt von X, d.h. $X(p)=0$ und $DX(p)$ hat keine Eigenwerte mit 0 Realteil. Dann sind φ und $T_p\varphi$ lokal topologisch Konjugiert um p.

Es genügt zu zeigen

<u>Satz 2.12</u> $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sei ein C^1-Diffeomorphismus mit $f(0)=0$ und $A = Df(0)$ sei hyperbolisch (d.h. $Re(\lambda) \neq 0 \ \forall_{\lambda \in \sigma(A)}$). Dann existiert eine Umgeb. U von 0 und einen Homöomorphismus $h : U \to U'$ für eine Umgeb. U' von 0 s.d. $A \circ h = h \circ f$ woimmer es definiert ist.
(für z nah an 0)

<u>Hilfssatz 2.13</u> Es sei E ein Banach-Raum. Es seien $L : E \to E$ linear mit $\|L\| \leq a < 1$, $G : E \to E$ ein Isomorphismus mit $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Dann sind $(Id + L)$ und $(Id + G)$ Isomorphismen mit $\|(Id+L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$, $\|(Id+G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$.

Bw Es sei $y \in E$. Wir zeigen $\exists\, x \in E$ s.d. $(Id+L)x = y$
$$\Leftrightarrow x = y - Lx$$

Die Abb. $\mu(x) = y - Lx$ ist eine Kontraktion:

$$\|\mu(x_1) - \mu(x_2)\| = \|L(x_1 - x_2)\| \le a\|x_1 - x_2\|$$

$a < 1 \Rightarrow \mu$ ist eine Kontraktion $\xrightarrow{\text{Banach. Fixpunktsatz}} \exists!\, x$ mit $x = \mu(x)$

Daher ist $(Id+L)^{-1}$ definiert und $(Id+L)^{-1} y = x$

Ist $\|y\| = 1$, so ist $\|x\| = \|y - Lx\| \le \|y\| + \|Lx\| \le 1 + a\|x\|$
$$\Rightarrow \|x\| \le \frac{1}{1-a}$$

Folglich ist
$$\|(Id+L)^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|(Id+L)^{-1} y\| \le \frac{1}{1-a}$$

Hag Beweis über G. $\boxed{\Sigma}$

Es sei $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und hyperbolisch. Dann gilt

$$\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u,$$

wobei $\underbrace{E^s}_{\text{stabile Mfk}} = \bigoplus_{\substack{Re\lambda < 0 \\ \lambda \in \sigma(A)}} E(\lambda)$, $\underbrace{E^u}_{\text{instabil Mfk}} = \bigoplus_{\substack{Re\mu > 0 \\ \mu \in \sigma(A)}} E(\mu)$.

Bezeichne $A^s = A|_{E^s}$, $A^u = A|_{E^u}$. Wir nehmen an:

$$\|A^s\| \le a < 1, \quad \|(A^u)^{-1}\| \le a < 1 \quad \text{(bezüglich einer geeigneten Norm)}$$

$$C_b^0(\mathbb{R}^m) = \{ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ stetig, beschränkt, d.h. } \|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)| < \infty \}$$

$$\Rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(E^s) \oplus C_b^0(E^u)$$
$$f = (f|_{E^s}, f|_{E^u})$$

Satz 2.14 Es sei $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ mit Lipschitz-Konstante k,
(d.h. $\|\phi_i(z_1)-\phi_i(z_2)\| \le k\|z_1-z_2\| \quad \forall z_1,z_2 \in E$, $i=1,2$)

s.d. $k < \varepsilon = \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ für eine hyperbolische Matrix A. Dann sind $(A+\phi_1)$ und $(A+\phi_2)$ konjugiert auf $\mathbb{R}^m$.

Bw. Zu finden ist ein Homöomorphismus $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$h \circ (A+\phi_1) = (A+\phi_2)\circ h.$$

Wir zeigen $h = Id + u$ für ein $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$

$$(Id+u)\circ(A+\phi_1) = (A+\phi_2)\circ(Id+u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{A}+\phi_1 + u\circ(A+\phi_1) = \cancel{A}+A\circ u + \phi_2\circ(Id+u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_1 - \phi_2\circ(Id+u) = \underbrace{A\circ u - u\circ(A+\phi_1)} =: L(u)$$

Sei $L(u) = Au - u\circ(A+\phi_1)$.

Ist L invertierbar, so ist

$$u = L^{-1}(\phi_1 - \phi_2\circ(Id+u)) =: Pu,$$

wobei $\|Pu_1 - Pu_2\| \le \|L^{-1}\|\cdot\|\phi_2(Id+u_1)-\phi_2(Id+u_2)\| \le \underbrace{\|L^{-1}\|\cdot k}_{<\|L^{-1}\|\cdot\varepsilon}\|u_1-u_2\|$

Ist $\|L^{-1}\| < \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}$, so ist $\|L^{-1}\|\cdot\varepsilon < 1$

und P ist eine Kontraktion $\Rightarrow$ eindeutiges u.

Wir zeigen $\underbrace{A^{-1}L \text{ ist invertierbar}}_{\Rightarrow L \text{ invertierbar}}$ und $\|L^{-1}\| < \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}$:

Man sieht $A^{-1}L = Id - G$, für $G(u) = A^{-1}u\circ(A+\phi_1)$

Man betrachte $A^{-1}L = Id - G$ auf $C_b^0(E^s)$ bzw. $C_b^0(E^u)$ und zeige G erfüllt die Bedingungen vom Teil 2 bzw. Teil 1 des Hilfssatzes 2.13.

- $A^{-1}L = Id - G \; : \; C_b^0(E^s) \to C_b^0(E^s)$

  Zu zeigen : $G: C_b^0(E^s) \to C_b^0(E^s)$ ist ein Isomorphismus mit $\|G^{-1}\| \le a < 1$.

  $G(u) = A^{-1}u \circ (A+\phi_1)$. Ist $(A+\phi_1)$ invertierbar, so ist G invertierbar mit $G^{-1}(u) = Au \circ (A+\phi_1)^{-1}$. ⌈ $G \circ G^{-1}(u) = G \circ \underbrace{Au \circ (A+\phi_1)^{-1}}$

  $= A^{-1}\big(\underbrace{Au \circ (A+\phi_1)^{-1}}\big) \circ (A+\phi_1) = u$. ⌋

  Seien $z_1, z_2 \in E^s$ mit

  $(A+\phi_1) z_1 = (A+\phi_1) z_2 \Rightarrow \varepsilon \|z_1 - z_2\| \overset{\phi_1 \text{ Lipschitz}}{>} \|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)\| = \|Az_1 - Az_2\| \ge \|A^{-1}\|^{-1} \|z_1 - z_2\|$

  aber $\varepsilon = \frac{1-a}{\|A^{-1}\|} \overset{a<1}{<} \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow z_1 = z_2$ d.h. $(A+\phi_1)$ ist injektiv.

  Sei $w \in E^s$. Dann ist

  $(A+\phi_1)(z) = w \iff Az + \phi_1(z) = w \iff z = A^{-1}w - A^{-1}\phi_1(z) =: F(z)$

  $\|F(z_1) - F(z_2)\| = \|A^{-1}\phi_1(z_1) - A^{-1}\phi_1(z_2)\| \le \|A^{-1}\| \cdot k \|z_1 - z_2\| \overset{k<\varepsilon}{<} \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \varepsilon}_{<1} \|z_1 - z_2\| \quad \left(\varepsilon = \frac{1-a}{\|A^{-1}\|} < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \right)$

  $\Rightarrow$ F ist eine Kontraktion $\Rightarrow \exists!\, z$ s.d. $z = F(z)$

  $\Rightarrow$ $(A+\phi_1)$ ist surjektiv

  $(A+\phi_1)$ invertierbar

  Weiter ist $\|G^{-1}\| \le a < 1$.

  Es sei $u \in C_b^0(E^s)$ mit $\|u\| = \sup_x |u(x)| = 1$.

  $\Rightarrow \big|Au \circ \underbrace{(A+\phi_1)^{-1}(y)}_{y'}\big| = |Au(y')| \underset{\|A\| \le a}{\le} a\, |u(y')| \le a < 1 \quad \forall\, y \in E^s$

  $\Rightarrow \|G^{-1}\| = \sup_y \big|Au \circ (A+\phi_1)^{-1}(y)\big| \le a < 1$.

Hilfssatz 2.13 $\xRightarrow{}$ **Teil 2.**

$$Id - G : C_b^0(E^s) \to C_b^0(E^s) \text{ ist ein Isomorphismus}$$

$$\text{mit } \|(Id-G)^{-1}\| \le \frac{a}{1-a} < \frac{1}{1-a}$$

$$A^{-1}L = Id - G \Rightarrow L = A \circ (Id - G) \Rightarrow L^{-1} = (Id-G)^{-1} \circ A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left\| L^{-1}\big|_{C_b^0(E^s)} \right\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} .$$

- $A^{-1}L = Id - G : \; C_b^0(E^u) \to C_b^0(E^u)$

Zu zeigen ist für $G : C_b^0(E^u) \to C_b^0(E^u)$ gilt $\|G\| \le a < 1$.

$G(u) = A^{-1} u \circ (A + \phi_1)$. Es sei $u \in C_b^0(E^u)$ mit $\|u\| = \sup_x |u(x)| = 1$.

$$\Rightarrow \left| A^{-1} u \circ \underbrace{(A+\phi_1)(y)}_{y'} \right| = |A^{-1} u(y')| \underset{\|A^{-1}\| \le a}{\le} a\, |u(y')| \le a < 1 \quad \forall y \in E^u$$

$$\Rightarrow \quad \|G\| = \sup_y |A^{-1} u \circ (A + \phi_1)(y)| \le a < 1$$

Hilfssatz 2.13 $\xRightarrow{}$ **Teil 1.**

$$Id - G : C_b^0(E^u) \to C_b^0(E^u) \text{ ist ein Isomorphismus}$$

$$\text{mit } \|(Id-G)^{-1}\| \le \frac{1}{1-a}$$

$$\overset{L^{-1} = (Id-G)^{-1} A^{-1}}{\Rightarrow} \quad \left\| L^{-1}\big|_{C_b^0(E^u)} \right\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} .$$

Wir habe also gezeigt $\exists!\, u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ s.d. für $h = Id + u$ gilt

$$h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h$$

Noch zu zeigen: $h : C_b^0(\mathbb{R}^m) \to C_b^0(\mathbb{R}^m)$ ist ein Homöomorphismus.

$$\left.\begin{aligned} (Id+u) \circ (A+\phi_1) &= (A+\phi_2) \circ (Id+u) \\ (Id+v) \circ (A+\phi_2) &= (A+\phi_1) \circ (Id+v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{(Id+u) \circ (Id+v)} \circ (A+\phi_2) = (Id+u) \circ (A+\phi_1) \circ (Id+v)$$

ähnlich $\exists v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$

$$= (A+\phi_2) \circ \underbrace{(Id+u) \circ (Id+v)}$$

$$\xRightarrow[\tilde h \circ (A+\phi_2) = (A+\phi_2) \circ \tilde h]{\exists!\, \tilde h = Id + \tilde u \text{ s.d.}} (Id+u) \circ (Id+v) = Id, \quad \text{symmetisch ist auch } (Id+v) \circ (Id+u) = Id$$

d.h. $(Id+u)$ ist ein Homöom. mit $(Id+u)^{-1} = Id + v$. $\boxed{\equiv}$