Kapitel 2. Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten

§ 2.1 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Es seien M eine C^{r+1}-Mfk $(r \geq 0)$ und TM das Tangentialbündel.

Def 2.1 $\pi : TM \to M$ sei die Projektion, $(x, v) \longmapsto x$. Ein Vektorfeld auf M ist eine Abb.

$$X : M \to TM$$

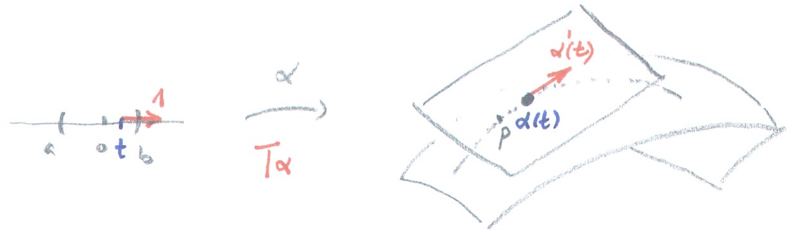
s.d. $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, d.h. $X(p) \in T_p M \quad \forall_{p \in M}$. Ist X eine C^r-Abb, so nennt man X ein C^r-Vektorfeld oder ein C^r-dynamische System auf M. Die Menge aller C^r-Vektorfelder bezeichnet man mit $\mathfrak{X}^r(M)$.

Def 2.2 Es sei $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Eine lokale Lösung (oder eine Integralkurve von X durch einen Punkt $p \in M$ ist eine C^r-Abb $\alpha : J \to M$, wobei $J = (a, b)$, $a < 0 < b$, s.d.

$$\alpha(0) = p \,, \quad \alpha'(t) := T_t \alpha \cdot 1 = X(\alpha(t)) \,, \quad \forall_{t \in J} \,.$$

$T\alpha : TJ \to TM \qquad T_t\alpha : \underbrace{T_t J}_{\cong \mathbb{R}} \to T_{\alpha(t)} M \,, \; 1 \mapsto T_t \alpha \cdot 1$

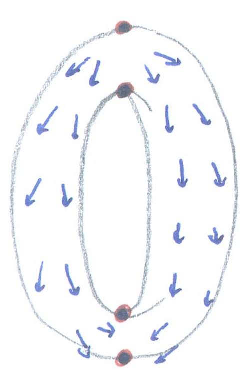
Das Bild einer lokalen Lösung heißt einem Orbit oder eine Trajektorie durch p.



<u>Def 2.3</u> Es seien $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $X : M \to TM$. Ein Punkt $p \in M$ heißt einen <u>kritischen Punkt</u> von X, falls $X(p) = 0_p$ (wobei $0_p \in T_pM$ den null Vektor in T_pM bezeichnet). Sonst heißt p einen <u>regulären Punkt</u>.

<u>Beispiel 2.4</u> Es sei M ein gerade stehender Torus in $\mathbb{R}^3$, $f : M \to \mathbb{R}$ sei die Höhefunktion und $X : M \to TM$ sei das neg. Gradientenfeld von f, d.h.

$$X = -\nabla f : M \to TM$$
$$p \mapsto \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big|_p\right)$$



Dann gilt: Hag

$p \in M$ ist ein kritischer Punkt von f

$\Leftrightarrow$ p ist ein kritischer Punkt von X.

<u>Bemerkung 2.5</u> $\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$ kann man als

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases}$$

umschreiben.

Für $p \in M$ und eine Karte (U, φ) um p in M,

$v \in T_pM$ " eine Karte (TU, σ) um (p,v) in TM,

hat X eine lokale Darstellung $\hat{X}$:

$$
\begin{tikzcd}
\underset{p}{U} \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\varphi"] & \underset{(p,\, [c]) \; v}{TU} \arrow[d, "\sigma"] \\
\underset{\varphi(p)}{\mathbb{R}^m} \arrow[r, "\hat{X}"] & \underset{(\varphi(p),\, D(\varphi \circ c)(0))}{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}
\end{tikzcd}
\qquad \hat{X} = \sigma \circ X \circ \varphi^{-1}
$$

Dann ist $\hat{X}$ ein dynamische System in euklidischen Räumen, und die allen lokalen Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit der Lösungen für $\hat{X}$ können für X auf Mnfkn erweitert werden.

Def 2.6 Es sei $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Unter einer Fluss-Box von X in $p_0 \in M$ versteht man eine C^r-Abb. $\varphi : U \times J \to M$, wobei $U \subset M$ eine offene Umgeb. von p_0 ist, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval um 0 ist und es gilt:

1° für $p \in U$, ist die Kurve $\varphi_p : J \to M$, $t \mapsto \varphi(p,t)$ eine Integralkurve von X durch p, d.h. $\varphi_p(0) = p$, $(T_t \varphi_p) \cdot 1 = X(\varphi_p(t))$ $\forall t \in J$.

2° für $t \in J$ ist die Abb. $\varphi_t : U \to \varphi_t(U) \subset M$, $p \mapsto \varphi(p,t)$ ein Diffeom.

<u>Satz 2.7</u> (Satz von Fluss-Box) M sei eine C^{r+1}-Mnfk, $X \in \mathcal{X}^r(M)$ und $p_0 \in M$ sei ein regulärer Punkt von X. Dann existiert eine Fluss-Box $\varphi: J \times U \to M$ von X in p_0, und für jeder Integralkurve α von X durch $p \in U$ stimmt φ_p mit α auf dem Interval wo die beide definiert sind, überein.

<u>Satz 2.8</u> Ist M kompakt und $X \in \mathcal{X}^r(M)$, so ist jede Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. (D.h. jede maximale Lösung ist eine globale Lösung).

Es sei M eine kompakte C^{r+1}-Mnfk, $X \in \mathcal{X}^r(M)$, dann ist eine globale Lösung $\alpha_p(t)$ definiert für alle $p \in M$ und $t \in \mathbb{R}$.

Sei $\varphi(p,t) = \alpha_p(t)$. Dann bekommt man eine

$$\varphi: M \times \mathbb{R} \to M, \qquad (*)$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1° $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \quad \forall_{t,s \in \mathbb{R}}$

2° $\varphi_0 = Id_M$

3° $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1} \quad \forall_{t \in \mathbb{R}}$.

$\Rightarrow$ • φ_t ist ein Diffeom. $\forall_{t \in \mathbb{R}}$

• $\{ \varphi_t : t \in \mathbb{R} \}$ ist eine Gruppe der Diffeom. mit 1- Parameter.

Man nennt φ von (*) einen Fluss auf M und $\alpha_p : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \varphi(p,t)$, eine Flusslinie durch p. Das Bild $\alpha_p(\mathbb{R})$ heißt den Orbit oder Trajektorie durch p.

§ 2.2 Rektifikationssatz

Der Rektifikationssatz besagt, dass innerhalb einer kleinen Umgebung von regulären Punkten die topologische Struktur der Flüsse die gleich bleibt.

Satz 2.9 X sei ein C^r-Vektorfeld auf einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^m$ und $p_0 \in U$ sei ein reg. Punkt von X. Dann existiert eine Umgeb. U_{p_0} von p_0 und ein Diffeom. α, der die Flüsse von X in U_{p_0} nach einer Familie von parallelen Strecken um den Ursprung in $\mathbb{R}^m$.

Bw. $X : U \to TU$

$$p_0 \mapsto X_{p_0} \in T_{p_0}U \cong \mathbb{R}^m$$

Durch einen Koordinatenwechsel können wir annehmen, dass

$p_0 = 0$ und $X_{p_0} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. D.h.

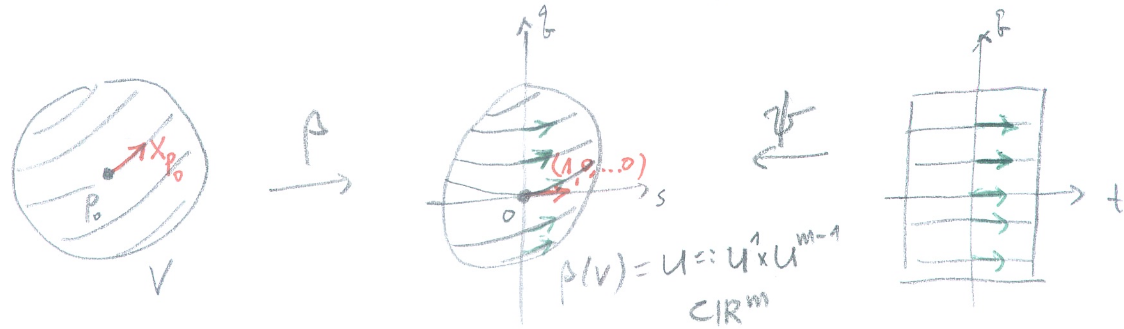
$\exists$ $V \subset U$ eine Umgeb. von p und einen Diffeom.

$$\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

s.d. $\rho(p_0) = 0$ und

$$X_\rho : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\rho^{-1}} V \xrightarrow{X} TV \xrightarrow{D\rho} T\mathbb{R}^m$$

$$0 \longmapsto p_0 \longmapsto X_{p_0} \longmapsto (1, 0, \dots, 0)$$



Wegen Satz 2.7 (Satz von Fluss-Box), gibt es eine Fluss-Box

$\varphi : J \times \underset{U^1 \times U^{m-1}}{U} \to U$ von X_ρ in 0, s.d. $\varphi_{s,q}(t) := \varphi(t, s, q) : J \to \mathbb{R}^m$ erfüllt:
(t, s, q)

$$\varphi_{s,q}(0) = (s, q), \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\varphi_{s,q}(t) = X_\rho(\varphi_{s,q}(t))$$

Definiere $\psi : J \times U^{m-1} \to U$.
$$(t, q) \longmapsto \varphi(t, 0, q)$$

$$D\psi_{(0,0)} = \Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial t}\varphi_{(0,0,0)}}_{= X_\rho(0) = (1, 0, \dots, 0)^T},\ \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial q}\varphi_{(0,0,0)}}_{= \mathrm{Id}}\Big)$$

Durch ψ ist jede Strecke (parallel zur t-Achse) in einer Lösung $\varphi(t, 0, q)$ (mit Anfangswert $(0, q) \in U$) gebildet. Setze $\alpha = \psi^{-1} \circ \rho$. $\boxed{}$