Abschnitt 1.5 Satz von Sard und Transversalitätstheorie

Satz 1.1 (Sard) Es sei $f: M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei glatte Mnfk.n M, N. Dann hat die Menge aller kritischen Werte von f das Lebesgue-Maß null in N.

Def. 1.2 (i) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat das L-Maß null, falls

$\forall_{\varepsilon > 0}$ $\exists$ abzählbar viele Würfel $C_1, C_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^n$ s.d. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ und $\sum \mu(C_i) < \varepsilon$

$\mu(C_i)$: L-Maß von C_i

(ii) Eine Menge $A \subset M$ hat das L-Maß null, falls für jede Karte (U, φ), $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^m$ das L-Maß null in $\mathbb{R}^m$ hat.

Korollar 1.3 Die Menge aller regulären Werte von einer glatten Abb. $f: M \to N$ ist dicht in N.

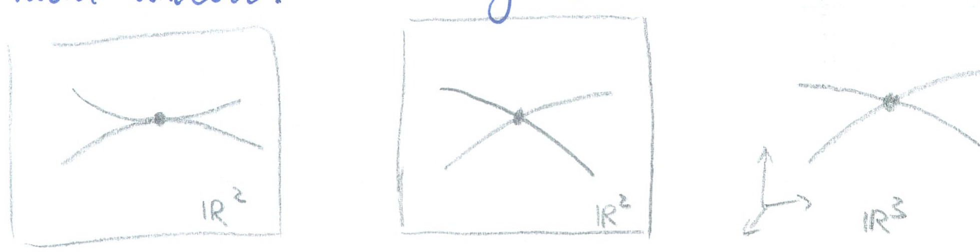
Bemerkung 1.4

(i) Der Satz von Sard besagt nichts über kritische Punkte.

z.B. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$
- $0 \in \mathbb{R}$ ist der einzige kri. Wert.
- jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein kri. Punkt.

(ii) Die Differenzierbarkeit von f im Satz von Sard kann man mit C^r ersetzen, aber r muss $r > \max\{0, m-n\}$ erfüllen.

Der Transversalitätssatz ist ein grundliegendes Resultat in der Differentialtopology und spielt eine wichtige Rolle die struktuelle Stabilität der dynamischen Systeme zu untersuchen. Dynamische Systeme, besonders die qualitative Theory der dynamische Systeme, interessiert sich vor allem das analytische und geometrische Verhalten gewisser mathematischen Modelle (Abbildungen, Differentialgleichungen, dynamische Systeme usw.), das sich gegen kleine Störungen nicht ändert. Dies hängt letzendlich von der Transversalität ab.



× ✓ ×

transversal

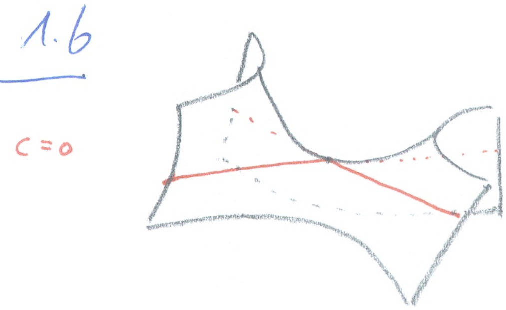
<u>Def. 1.5</u> Es seien $\underset{\dim = k}{K}, \underset{= \ell}{L}$ zwei Teilmnfk einer Mnfk $\underset{\dim = m}{M}$ und $p \in K \cap L$. Ist $T_pK + T_pL = T_pM$, so sagt man K, L seien <u>transversal</u> in p, bezeichnet mit $K \pitchfork_p L$. Ist $T_pK + T_pL \subsetneq T_pM$, so sind K, L <u>nicht transversal</u> in p.

Für $p \notin K \cap L$ sind K, L per Definition transversal in p.

Sind K, L transversal in jedem Punkt von $K \cap L$, so sagt man K und L seien <u>transversal</u>, und bezeichnet mit $K \pitchfork L$.

Bemerkung Ist $K \pitchfork_p L$, so ist $K \cap L$ lokal um p eine $(k+l-m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M. Ein Spezialfall ist wenn $K \pitchfork_p L$ und $k+l=m$, dann ist $M = K \times L$ lokal um p.

Beispiel 1.6



$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$

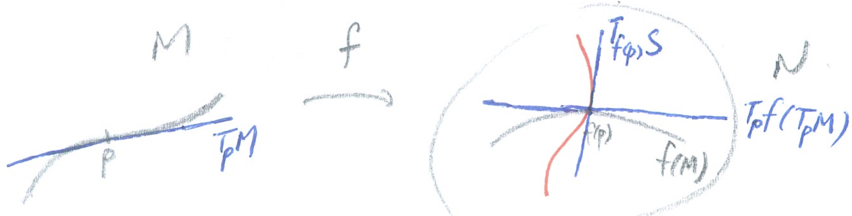
$L_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = c\}$

$\Rightarrow K \pitchfork L_c$ für alle c außer $c=0$.

Def. 1.7 Es sei S eine Teilmfk von einer glatten Mfk N und $f: M \to N$ sei eine C^r-Abb. $(r \geq 1)$. Für $p \in M$ ist f transversal zu S um p, falls gilt:

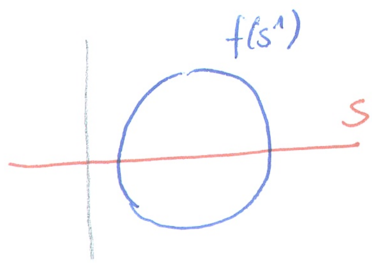
$$f(p) \notin S \quad \text{oder} \quad T_p f(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N,$$

bezeichnet mit $f \pitchfork_p S$. Ist $f \pitchfork_p S$ für alle $p \in M$, so sagt man f sei transversal zu S, bezeichnet mit $f \pitchfork S$.

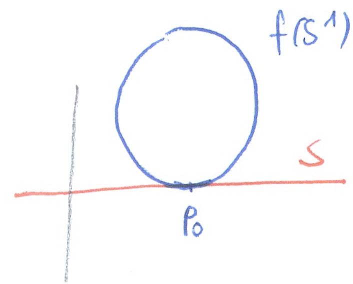


Bemerkung:
- $f(M) \cap S = \emptyset \Rightarrow f \pitchfork S$
- $f: M \to N$ sei eine Submersion $\left(\begin{matrix} \dim M \geq \dim N = n \\ \operatorname{rank}_p f = n \quad \forall p \end{matrix}\right)$
  $\Rightarrow f \pitchfork S$ für alle $S \subset N$.

Beispiel 1.8 $M = S^1$, $N = \mathbb{R}^2$, $S \subset \mathbb{R}^2$ die x-Achse.



(i) $f \pitchfork S$



(ii) $f \pitchfork_p S$ für alle p außer P_0.

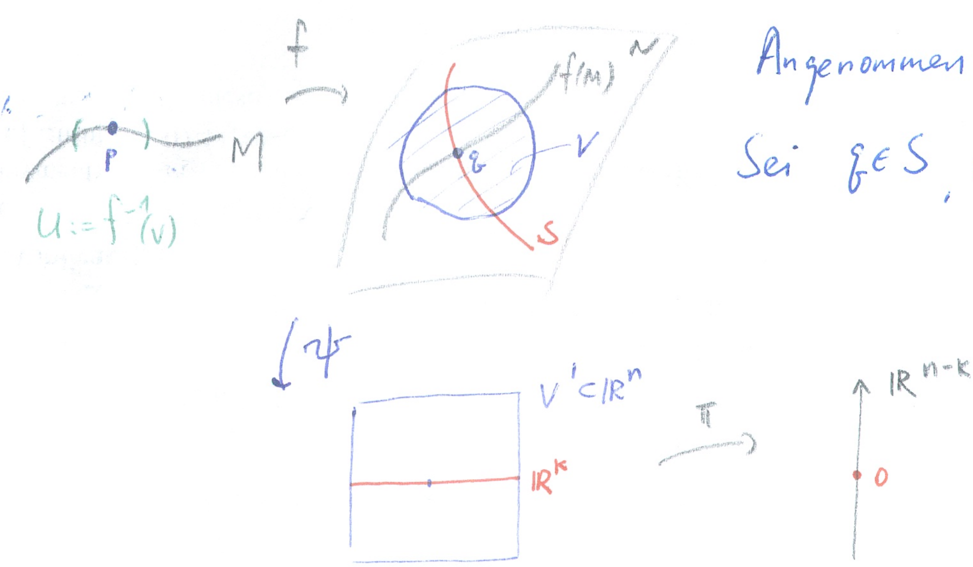
Satz 1.9 M (bzw. N) sei ein Mnfk der Dim. m (bzw. n).

$f: M \to N$ sei C^r und $S \subset N$ sei eine k-dim. Teilmnfk, $f \pitchfork S$

Dann ist $f^{-1}(S)$ entweder eine leere Menge oder eine C^r-Teilmnfk

von M mit $\dim(f^{-1}(S)) = m+k-n$. (d.h. $\operatorname{codim}(f^{-1}(S)) = n-k$).

Bw.



Angenommen $f^{-1}(S) \neq \emptyset$.

Sei $q \in S$, $p \in M$ s.d. $f(p) = q$.

$S \subset N$ ist eine Teilmnfk $\Rightarrow \exists (\psi, V)$ s.d. $\psi(S \cap V) = V' \cap \mathbb{R}^k$

$\pi: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ sei die Projektion.

$\Rightarrow (\pi \circ \psi)^{-1}(0) = S \cap V$

Sei $U := f^{-1}(V)$ eine Umgeb. von p.

"$f \pitchfork S$ in $U \Leftrightarrow 0$ ist ein reg. Wert von $\pi \circ \psi \circ f|_U$"

"$\Rightarrow$" $\underset{p' \in f^{-1}(V \cap S)}{f \pitchfork_{p'} S} \Rightarrow T_{p'}f(T_{p'}M) + \underbrace{T_{f(p')}S}_{k\text{-dim}} = \underbrace{T_{f(p')}N}_{n\text{-dim}}$

Consider:

$$T_{p'}(\pi \circ \psi \circ f) : T_{p'}M \xrightarrow{T_{p'}f} T_{f(p')}N \xrightarrow{T_{f(p')}(\pi \circ \psi)} T_0 \mathbb{R}^{n-k}$$

$$T_{f(p')}N = T_{p'}f(T_{p'}M) + \underbrace{T_{f(p')}S}_{} \longmapsto 0$$

$$\xrightarrow{T_{f(p')}(\pi \circ \psi) \text{ surj}} \quad T_{p'}f(T_{p'}M) \xrightarrow{T(\pi \circ \psi)} T_0 \mathbb{R}^{n-k} \text{ surj.}$$

$\nwarrow$ beschränktes $T_{f(p)}(\pi \circ \psi)$

$\Rightarrow T_{p'}(\pi \circ \psi \circ f) : T_{p'}M \to T_0 \mathbb{R}^{n-k}$ ist surj.

$\Rightarrow p'$ ist ein reg. Punkt $\forall_{p' \in f^{-1}(V) = U}$

$\Rightarrow 0$ ist ein reg. Wert von $\pi \circ \psi \circ f|_U$.

"$\Leftarrow$" Hag.

Korollar 1.10 K, L seien Teilmfkn von M und $K \pitchfork L$.

Dann ist $K \cap L$ eine Teilmfk von M.

Whitney - Topologie

Seien M, N glatte Mfkn. Betrachte

$$C^r(M,N) = \{ f \mid f: M \to N \text{ ist eine } C^r\text{-Abb.} \}.$$

Definiere eine Topologie auf $C^r(M,N)$ wie unten angegeben:

Seien (U,φ), (V,ψ) Karten für M, N. O.B.d.A. $f(U) \subset V$.

Für $\varepsilon > 0$, $0 \le s \le r$, definiere

$$B_\varepsilon(f,U,V) = \left\{ g \in C^r(M,N) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{s} \sup_{x \in \varphi(U)} \| D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g \varphi^{-1})(x) \| < \varepsilon \\ g(U) \subset V \end{array} \right\}$$

Es sei M kompakt und $U_1, \dots, U_d$ sei eine Überdeckung von M.

Wähle entsprechend $V_1 \dots V_d$ Karten von N s.d. $f(U_i) \subset V_i$, $\forall i = 1 \dots d$

Setze $B_\varepsilon(f) = \bigcap_{i=1}^{d} B_\varepsilon(f, U_i, V_i)$ und nenne es die ε-Umgebung von f. Die Topologie, die von alle $B_\varepsilon(f)$ erzeugt sind, heißt die C^s-Topologie oder die C^s-Whitney-Topologie.

Satz 1.11 (Die Offenheit der Transversalität) M, N seien glatte Mfkn und $S \subset N$ sei eine Teilmfk. Dann ist

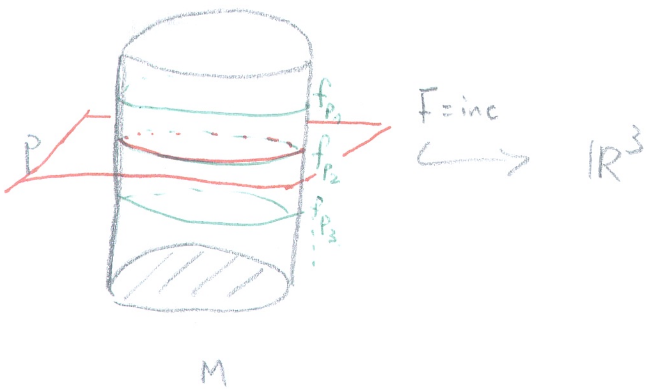
$$C^\infty_S(M,N) = \{ f \mid f \in C^\infty(M,N),\ f \pitchfork S \}$$

eine offene Menge in $C^\infty(M,N)$ (bezüglich der C^∞-Whitney-Topo.)

Satz 1.12 (Die Dichte der Transversalität) Seien M, N, P glatte Mfkn, $F: M \times P \to N$ eine glatte Abb, $S \subset N$ eine Teilmfk und $F \pitchfork S$.

Dann ist $f_p := F(\cdot, p) \pitchfork S$ für fast alle $p \in P$.

(Insbesondere ist $\{p \in P : f_p \pitchfork S\}$ dicht in P.)



Satz 1.13 Sei $f: M \to N$ eine glatte Abb. und $S \subset N$ eine Teilmfk. S und N seien ohne Rand. Dann existiert eine glatte Abb. $g: M \to N$, die zu f homotop ist und $g \pitchfork S$.