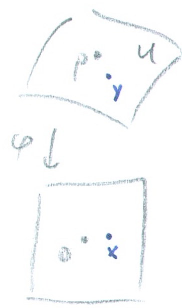
Korollar 1.6 (geometrische Bedeutung des Index)

Der Index eines nichtausgearteten kritischen Punktes entspricht der Anzahl der unabhängigen Richtungen, wobei die Funktion abnimmt.

Korollar 1.7 Jeder ~~nichtentarteter~~ nicht ausgearteter kritischer Punkt einer glatten Funktion ist isoliert.



Bw. $f\circ\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_m) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} x_i^2$

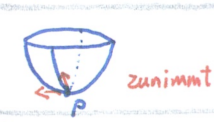
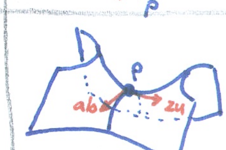
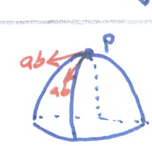
$D(f\circ\varphi^{-1})_x = 0 \iff x = 0$ für alle $x \in \varphi(U)$

$\Rightarrow T_{\underset{\varphi^{-1}(x)}{\overset{\shortparallel}{y}}} f = 0 \iff y = p$ für alle $y \in U$.

Korollar 1.8 Ist f eine glatte Funktion auf einer kompakten Mnfk mit allen kritischen Punkten ~~nichtentartet~~ nicht ausgeartet, so hat f nur endlich viele kritischen Punkte.

Bw. Hag. (vgl. Koro. 1.7)

Beispiel 1.9 $m=2$

$\text{Index}_f(p)$	Quadratische Form $\hat{f}$	Umgeb. von p
$k=0$	$x_1^2 + x_2^2$	
$k=1$	$-x_1^2 + x_2^2$	
$k=2$	$-x_1^2 - x_2^2$	

Def 1.10 Eine glatte reellwertige Funktion auf eine Mnfk M ist eine <u>Morsefunktion</u> falls sie keine ausgearteten kritischen Punkte hat.

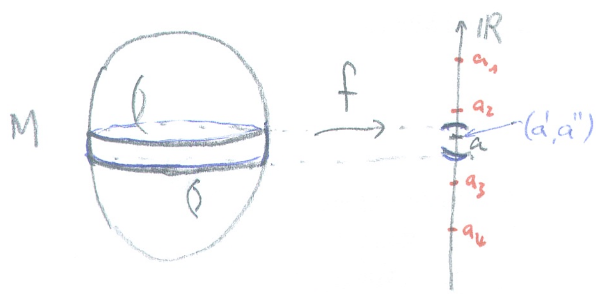
$$\left.\begin{array}{c}\text{Morsefunktion}\\ + \\ \text{Indizes}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Informationen}\\ \text{von der topo.}\\ \text{Struktur von } M\end{array}$$

Ist eine Morsefunktion aber typisch oder nur speziell?

Ein grundliegendes Resultat von Morsetheorie besagt:

fast alle Funktionen sind Morsefunktion.

Satz 1.11 Die Menge aller Morsefunktionen auf M ist eine dichte offene Teilmenge im Raum aller glatten Funktionen $M \to \mathbb{R}$ in der C^2-Topologie. (d.h. Morsefunction ist "typisch" / "generisch".)



Morsefunktion $\Rightarrow$ endlich viele kri. Punkte

$\Rightarrow$ endlich viele kri. Werte: $a_1, a_2, \dots, a_r$

$\operatorname{rank}_p f \in \{0, 1\}$ $\quad$ $(\operatorname{rank}_p f \le \min\{m, \underbrace{n}_{1 = \dim \mathbb{R}}\})$

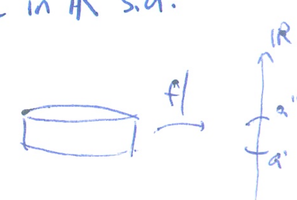
0: $\Updownarrow$ $T_p f = 0$ $\Updownarrow$ p singulär

1: $\Updownarrow$ $T_p f : T_p M \to T_q \mathbb{R}$ surj $\Leftrightarrow p$ regulär

- Falls $a \in \mathbb{R}$ ein reg. Wert ist, gibt es ein Interval (a', a'') um a in $\mathbb{R}$ s.d.

$$f| \ : \ \underbrace{f^{-1}(a', a'')}_{= \{x \in M :\ a' < f(x) < a''\}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{eine Submersion ist.}$$

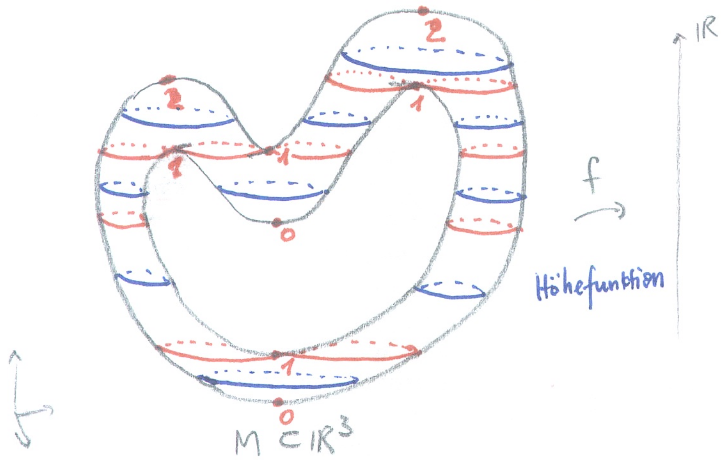
Hag.



$\xrightarrow{\text{Bem 1.9, Absch. 1.2}}$ $f^{-1}(a)$ ist eine $(m-1)$-dim! Teilmnfk von M.

- Falls $a \in \mathbb{R}$ ein kritischer Wert ist, ändert sich die Topologie von $f^{-1}(y)$, als y an a vorbeikommt.

Beispiel 1.12 (Ein geborgener Torus)



— $f^{-1}(a)$, a kritisch

— $f^{-1}(a)$, a regulär

$$\chi(M_g) = \sum (-1)^i \underbrace{N_i}_{\#\text{ k. Punkte mit Index } i} = 2-2g$$

Geschlecht

die Euler-Charakteristik

$\Rightarrow g=1 \Rightarrow \chi(M_1) = 0$

$\Rightarrow$ Jeder geborgenen Torus erfüllt $\sum (-1)^i N_i = 0$

$\Rightarrow (1,2,1)$ ✓ $\quad (1,1,1)$ ✗ unmöglich

Wie sich die Topologie von $M^a := \{x \in M : f(x) \leq a\} = f^{-1}_{(-\infty, a]}$ ändert (bzw. nicht ändert), wenn a einen kritischen Wert (bzw. regulären Wert) passiert, beschreiben die folgenden Sätze:

Satz 1.13 Es sei f eine glatte reellwertigen Funktion auf M, es sei $a<b$ und $f^{-1}_{[a,b]}$ sei kompakt. Wenn es zwischen a und b keinen kritischen Werte gibt, dann ist M^a diffeomorph zu M^b. (M^b ist ein Deformationsretrakt auf M^a).

(a) Zwei stetige Abb.n $f, g : X \to Y$ heißt homotop zueinander, falls
$\exists$ stetig. $H : [0,1] \times X \to Y$ s.d. $H(0) = f$, $H(1) = g$. Bezeichne $f \sim g$

(b) Es sei $A \subset X$. X heißt einen Deformationsretrakt auf A, falls
$\exists$ stetig. $r : X \to A$ s.d. $inc \circ r \sim Id_X$ und $r|_A = Id_A$.

(c) X und Y heißen homotopieäquivalent, falls
$\exists$ $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ s.d. $g \circ f \sim Id_X$, $f \circ g \sim Id_Y$

Satz 1.4 Es sei f eine glatte reellwertige Funktion auf M, p sei ein nicht ausgearteter kri. Punkt von f mit Index k. Sei $\xi = f(p)$ und $f^{-1}_{[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]}$ sei kompakt und enthalte keine kri. Punkte außer p. Dann ist für ausreichend kleines ε, die Menge $M^{\xi+\varepsilon}$ homotopieäquivalent zu $M^{\xi-\varepsilon}$ mit einer angehängten k-Zelle.