Abschnitt 1.4 Einführung in die Morsetheorie

Wir haben bereit im Abschnitt 1.2 die Struktur der differenzierbaren Abbildungen unter der „maximalen Rang" Bedingung untersucht. Nun wollen wir darüber hinaus das Verhalten der diff. Abbildungen um einen „singulären" Punkt untersuchen, wo diese Bedingung fehlt. Im Allgemein ist diese eine anspruchsvolle Aufgabe. Wir werden uns auf reellwertige Abbildungen beschränken, und die entsprechende Singulärtheorie nennt man die Morsetheorie.

Def 1.1 Es sei $f: \overset{\dim m}{M} \to \overset{n}{N}$ glatt. Ein Punkt $p \in M$ heißt einen regulären Punkt von f, wenn $T_p f: T_pM \to T_{f(p)}N$ surjektiv ist. Ein nicht regülarer Punkt heißt einen kritischen Punkt. Ein Punkt $q \in N$ heißt einen regulären Wert von f, wenn jedes Urbild $p \in f^{-1}(q)$ regulär ist. Ein nicht regulärer Wert heißt einen kritischen Wert.

Bemerkung

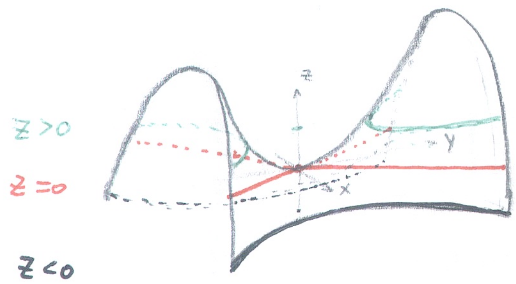
(a) $p \in M$ ist regulär $\Leftrightarrow (\operatorname{rank} f)_p = n$;
 von M

(b) wenn $m < n$, ist jeder Punkt singulär;

(c) Man betrachtet $q \in N \setminus f(M)$ als regulären Wert.

Es sei $N = \mathbb{R}$ für den Rest des Abschnittes.

Beispiel 1.2 (Sattelfläche) Es sei M gegeben von



$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{-1 \leq z \leq 1}{z = y^2 - x^2}\}$$

(ein hyperbolisches Paraboloid.)

Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ die Höhenfunktion, d.h.

$$f(x,y) = z = y^2 - x^2$$

Man prüft: $T_{(x,y)} f = (-2x, 2y)$ und es ist surjektiv für alle $p \in M$ außer $p = (0,0,0) \in M$. D.h.

Reguläre Punkte: $p \neq 0$ Reguläre Werte: $z \neq 0$

Kritische Punkte: $p = 0$ Kritische Werte: $z = 0$

Man sieht die topologische Struktur der Niveaumenge $f^{-1}(z)$ sich genau dann ändert, wenn z durch den kritischen Wert läuft.

Ein wichtiger Begriff die diff. Abb.n um kritische Punkte zu untersuchen ist die Hessenmatrix: für eine diff. Abb. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, ist

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

die Hessenmatrix von f um x, welche eine symmetrische Matrix ist und daher immer reelle Eigenwerte hat.

Ein kritischer Punkt x heißt nicht entartet, wenn $H_f(x)$ nicht singulär ist.

dim m

kritischer Punkt von f

<u>Def 1.3</u> Es sei $f: M \to \mathbb{R}$ glatt, $p \in M$ und $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eine Karte um p. Bezeichne $\varphi_\alpha(p) = (x_1, \dots, x_m)$. Die Matrix

$$H_f(p) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)) \right)$$

heißt die Hessenmatrix von f um p. Ist $H_f(p)$ nicht singulär, so nennt man p ~~einen~~ <u>nicht entartet</u>; sonst ist p ein <u>entarteter</u> kritischer Punkt. Die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_f(p)$ heißt den <u>Index</u> des kritischen Punktes p.

(Im Beispiel 1.2, ist $p=0$ ein nicht entarteter kritischer Punkt von f mit Index 1.)

Man merkt die Hessenmatrix ist von der Wahl der Karten abhängig, aber nicht die Definition von entarteten kritischen Punkten, weder noch der Index. Hag

<u>Lineare Algebra</u>:

- Ist A eine symmetische Matrix, so ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix, d.h. $\exists P$ s.d. $P^{-1} A P = \Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, diese Diagonalmatrix

  Ähnlichkeitsabb. / Basiswechselmatrix

  Λ ist weiter ähnlich zu $\mathrm{diag}[\mathrm{sign}(\lambda_1), \dots, \mathrm{sign}(\lambda_m)]$.

- Es sei $f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} x_i^2$. Dann ist p ein kritischer Punkt mit $H_p(f) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ und k = Index von p.

Satz 1.4 (Morse) Es seien M eine C^r-Mfk und $p \in M$ ein nicht entarteter kritischer Punkt mit Index k von einer C^{r+2}-Abbildung $f: M \to \mathbb{R}$. Dann existiert eine C^r-Karte (U, φ) von M um p s.d.

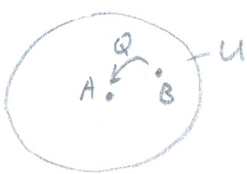
$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_m) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} u_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} u_i^2 .$$

Wir brauchen

Hilfsatz 1.5 Sei $A = \mathrm{diag}[a_1, \dots, a_m]$, wobei $a_i \in \{\pm 1\}$. Dann gibt es eine Umgebung U von A im Raum aller reellen symmetrische $m \times m$-Matrizen und eine glatte Abb.

$$P: \; U \to GL(m; \mathbb{R}) \leftarrow \{M \in \mathbb{R}^{m \times m} : \det M \neq 0\}$$

Sodass
- $P(A) = \mathrm{Id}$
- $Q^T B Q = A$, für alle $P(B) = Q$.

(

für jedes $B \in U$, kann man eine Basiswechselmatrix Q wählen s.d. Q glatt von B abhängt.)

Bw. Sei B eine symm. Matrix nah an A. O.B.d.A. $a_1 = 1$, dann ist $b_{11} > 0$. Sei

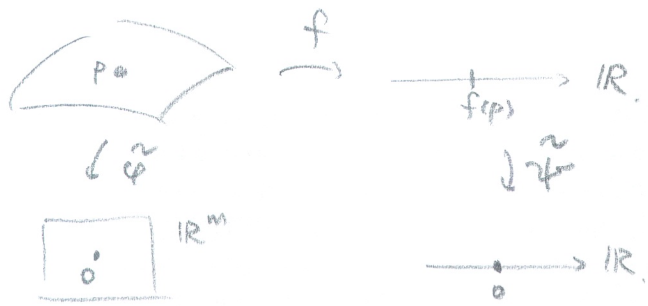
$$L = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1m}}{b_{11}} \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

Man prüft:

$$L^T B L = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

für ein symm. B_1. Wiederholt man den Prozess für B_1 u.s.w, So bekommt man eine Matrix Q mit $Q^T B Q = A$.

Beweis von Satz 1.4: Wähle eine Karte $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ um p und eine Karte $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ um $f(p)$ s.d. $\tilde{\varphi}(p) = 0$, $\tilde{\psi}(f(p)) = 0$.



$\Rightarrow$ Es genügt die Behauptung für $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ zu beweisen, wobei

$f(0) = 0$ und 0 ein kritischer Punkt ist.
$(Df(0) = 0)$

Mit einem linearen Basiswechsel können wir annehmen:

$$A := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) = \begin{array}{c} k \times k \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Dann ist (vgl. Fundamentalsatz der Analysis)

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\,dt\right) x_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^m \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx)\,ds\,dt\right) x_i x_j =: \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(x)\, x_i x_j.$$

Sei $B_x := (b_{ij}(x))_{1 \le i,j \le m}$, welche eine symm. Matrix ist.

Sei P die Abb. von Hilfsatz 1.5 und $Q_x := P(B_x)$.

Seien $U = \mathbb{R}^m$, $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) := Q_x^{-1} x$. Ist $y = \varphi(x)$, so ist

$$f(x) = x^T B_x x = y^T (Q_x^T B_x Q_x) y = y^T A y = -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_m^2.$$