

# Abschnitt 1.3. Tangentialbündel und Tangentialabbildungen

In euklidischen Räumen, um eine Kurve oder eine Oberfläche um einen Punkt zu untersuchen, wendet man häufig die entsprechende Tangentiallinie oder Tangentialebene an; um nichtlineare Funktionen zu untersuchen, nutzt man oft die entsprechenden Ableitungen.

Für differenzierbare Mnfkn, führt man Begriffe von Tangentialraum, Tangentialbündel und Tangentialabb. ein.

Sei  $M$  eine diff. Mnfk,  $p \in M$  sei ein Punkt. Unter einer glatten Kurve um  $p$  versteht man eine glatte Abb.

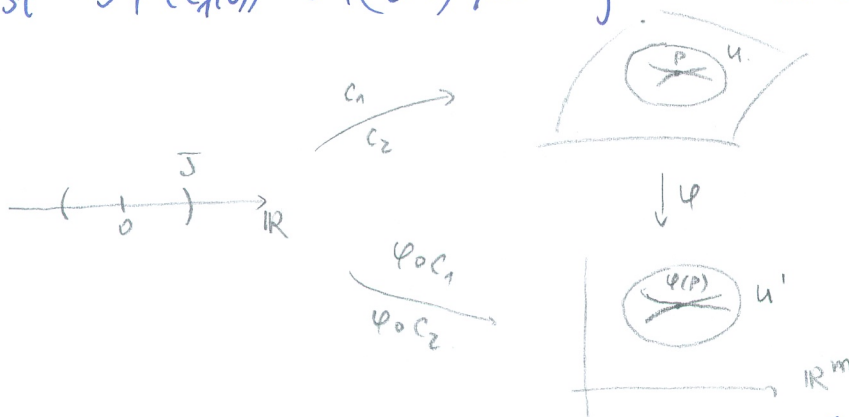
$$c: J \rightarrow M, \quad c(0) = p,$$

wobei  $J$  ein offenes Intervall um  $0$  in  $\mathbb{R}$  ist.

Def. 1.1 Sei  $p \in M$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $p$  in  $M$ .

Seien  $c_1, c_2$  zwei glatte Kurven um  $p$  (d.h.  $c_1(0) = c_2(0) = p$ ).

Ist  $D\varphi(c_1'(0)) = D\varphi(c_2'(0))$ , so sagt man  $c_1, c_2$  seien tangential um  $p$ .



Kurven, die tangential um  $p$  sind, bilden eine Äquivalenzklasse.

Eine solche Äquivalenzklasse  $[c]$  nennt man einen Tangentialvektor von  $M$  in  $p$ .

Der Tangentialraum  $T_p M$  ist die Menge aller Tangentialvektoren in  $p$ .

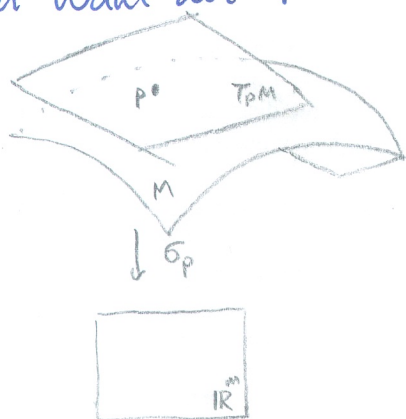
Es folgt aus der Definition des Tangentialraums eine Bijektion:

$$\begin{aligned} \sigma_p: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^m & \sigma_p^{-1}(v) &= [\varphi^{-1}(\varphi(p) + vt)] \\ [c] &\mapsto D(\varphi \circ c)(0), \end{aligned}$$

wobei die Inverse  $\sigma_p^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$  jeden Vektor in  $\mathbb{R}^m$  in einen Tangentialvektor in  $T_p M$  abbildet. (Hag). Definiere

$$\begin{aligned} \sigma_p^{-1}(v_1) + \sigma_p^{-1}(v_2) &= \sigma_p^{-1}(v_1 + v_2), \\ \sigma_p^{-1}(\lambda v) &= \lambda \sigma_p^{-1}(v), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Mit der obigen Operationen ist die lineare Struktur von  $\mathbb{R}^m$  zu  $T_p M$  übertragen, und damit ist  $T_p M$  ein  $m$ -dim<sup>l</sup> reellen linearen Raum, der zu  $\mathbb{R}^m$  isomorph ist. Man zeigt, dass diese lineare Struktur von der Wahl der Karten unabhängig ist. (Hag).



Seien  $M$  bzw.  $N$  diff. Manfk. der Dimension  $m$  bzw.  $n$ ,  $f: M \rightarrow N$  glatt,  $p \in M$ ,  $q := f(p) \in N$ . Ist  $[c_1] = [c_2] \in T_p M$ , so ist  $[f \circ c_1] = [f \circ c_2] \in T_q N$ .

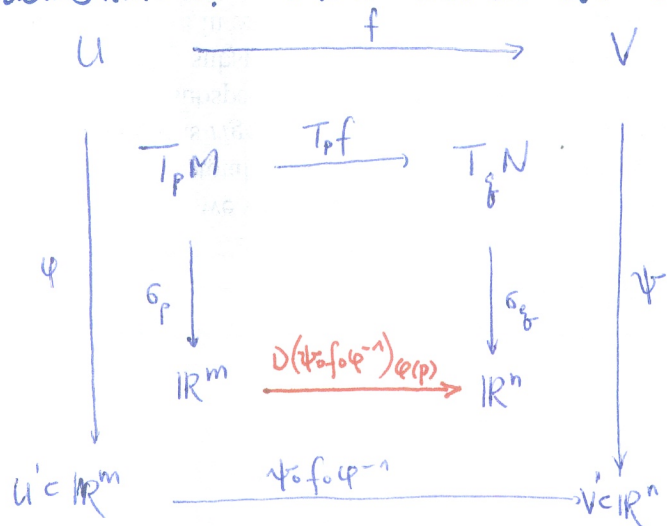
$f$  also induziert eine Abb:

$$\begin{aligned} T_p f: T_p M &\rightarrow T_q N \\ [c] &\mapsto [f \circ c], \end{aligned}$$

die man die Tangentialabbildung von  $f$  in  $p$  nennt.

Es sei  $(U, \varphi)$  bzw.  $(V, \psi)$  eine Karte um  $p$  bzw. um  $q$ .

Wir zeigen, dass die lokale Darstellung von  $T_p f$  (durch  $\sigma_p, \sigma_q$  ermöglichende) mit der Ableitung der lokale Darstellung von  $f$  übereinstimmt. Man betrachte das folgende Diagramm:



Zu zeigen ist:

$$\sigma_q \circ T_p f \circ \sigma_p^{-1}(v) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Beweis: Sei  $v \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $\sigma_p^{-1}(v) = [\varphi^{-1}(\varphi(p) + vt)]$  und

$$\text{LHS} = \sigma_q \circ T_p f \circ \sigma_p^{-1}(v) \stackrel{\text{Def. von } T_p f}{=} \sigma_q [f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + vt)] \stackrel{\text{Def. von } \sigma_q}{=} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + vt)(0)$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + vt) \stackrel{\text{Taylorreihe um } t=0}{=} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) + D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} vt + \dots$$

$$\Rightarrow D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + vt)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + vt) - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))}{t} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v = \text{RHS} \quad \checkmark$$

Bemerkungen:

(a)  $T_p f: T_p M \rightarrow T_q N$  ist eine lineare Abbildung. **Hag**

(b) Ist  $f \in C^r$ , so ist  $T_p f \in C^{r-1}$ .

(c)  $\text{rank } T_p f = (\text{rank } f)_p$

(d)  $T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$ , für  $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$ . **Hag**

Wir haben bisher über Tangentialraum und Tangentialabb. um einen Punkt auf Mannigfaltigkeit diskutiert. Nun wollen wir eine gesamte Struktur von Tangentialräumen einer Mannigfaltigkeit betrachten.

Def. 1.2 Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M = \bigcup \{ (p, v) : p \in M, v \in T_p M \}$$

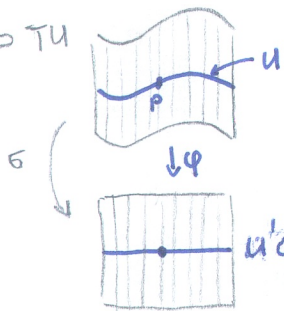
nennt man das Tangentialbündel von  $M$ .

\* Es ist beachtenswert, dass Tangentialräume von verschiedenen Punkten als verschiedene lineare Vektorräume betrachtet werden sollen.

Satz 1.3 Ist  $M$  eine  $C^r$ -Mnfk der Dimension  $m$  (für  $r \geq 1$ ), so ist  $TM$  eine  $C^{r-1}$ -Mnfk der Dimension  $2m$ .

Beweis. (I)  $TM$  als ein topologischer Raum:

$TM \supset TU$



Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $p$ . Dann ist  $U' = \varphi(U)$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^m$ . Betrachte die Bijektion

$$\sigma : TU \rightarrow U' \times \mathbb{R}^m$$

$$(p, [v]) \mapsto (\varphi(p), D(\varphi)_p(v)),$$

wobei man sieht  $\sigma|_{T_p M} = \sigma_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear. Isomorph.

$M$  ist ein topo. Raum mit der induzierten Topologie durch  $\sigma$  von  $U' \times \mathbb{R}^m$ , d.h.  $W \subset M$  ist offen  $\Leftrightarrow \sigma(W)$  ist offen in  $U' \times \mathbb{R}^m$ .

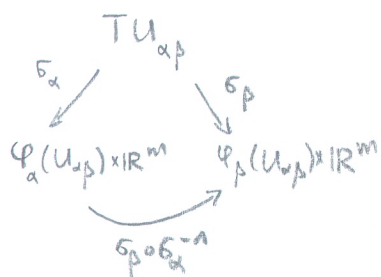
Man prüft, dass diese Topologie von der Wahl der Karten unabhängig ist.

(II) Ein Atlas auf TM:  $\{(TU, \sigma) : (u, v) \in \mathcal{A}_M\} =: \mathcal{A}_{TM}$   
Atlas von M

Da jede Umgebung  $TU$  durch  $\sigma$  in eine offene Menge in  $\mathbb{R}^{2m}$  abgebildet ist, ist  $TM$  mit dem Atlas eine topo. Mnfk der Dimension  $2m$ .

(III) TM als eine  $C^{r-1}$ -Mnfk:

Es sei  $(p, [c]) \in TU_\alpha \cap TU_\beta = TU_{\alpha\beta}$ . Betrachte den Kartenwechsel



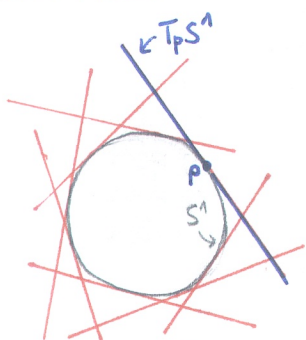
$$\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^m$$

$$(\varphi_\alpha(p), D(\varphi_\alpha \circ c)(c)) \mapsto (\varphi_\beta(p), D(\varphi_\beta \circ c)(c))$$

D.h.  $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha^{-1} = (\underbrace{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}}_{C^r}, \underbrace{D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}_{C^{r-1}})$  ist  $C^{r-1}$ .

Daraus folgt, dass  $TM$  eine  $C^{r-1}$ -Mnfk der Dimension  $2m$  ist.

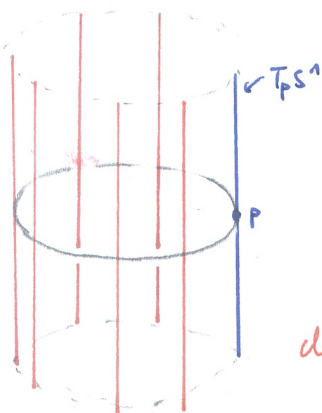
Beispiel 1.4 Betrachte den Einheitskreis



$$TS^1 = \bigsqcup_p T_p S^1$$

$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , welcher eine 1-dim<sup>l</sup> Mnfk ist.

Dann ist  $TS^1$  eine 2-dimensionale Mnfk.



$TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$  ist ein Zylinder der unendlichen Länge.

→ Jede stetige gekämmte Igel hat mindestens eine kahle Stelle.

Für  $S^2$ , ist jedoch  $TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}^2$  (vgl. Satz von Igel).

In der Tat, für  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$  gilt  $TS^n = S^n \times \mathbb{R}^n \Leftrightarrow n=1,3,7$ .

Für  $M$  mit  $TM = M \times \mathbb{R}^m$ , heißt  $M$  parallelisierbar.

Beispiel 1.5 Euklidische Räume und ihre offene Teilmengen sind parallelisierbar.

## Bemerkung:

(a)  $TM$  ist nicht kompakt.

(b) Das Tangentialbündel gibt ein Beispiel vom Faserbündel.

Unter Faserbündel versteht man ein Tripel  $(X, B, \pi)$  für topo. Räume  $X, B$  und eine stetige surjektive Abb.  $\pi: X \rightarrow B$ , welche lokal trivialisierbar ist, d.h.  $\forall p \in B \exists$  Umgebung  $U \subset B$  s.d.  $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$ , für einen topo. Raum  $F$ .

ist, d.h.  $\forall p \in B \exists$  Umgebung  $U \subset B$  s.d.  $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$ , für einen topo. Raum  $F$ .  
homöom.

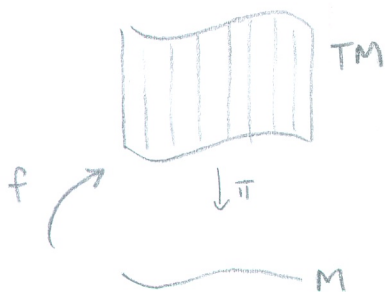
D.h.  $X \supset \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$

$$\begin{array}{ccc} & & \swarrow \text{Proj.} \\ & \downarrow \pi & \\ B \supset & U \supset p & \end{array}$$

kommutiert.

Man nennt  $X$  den Faser Raum,  $B$  den Basisraum,  $\pi$  die Projektion und  $F$  die Faser. Ist  $F$  ein Vektorraum, so heißt  $(X, B, \pi)$  auch ein Vektorbündel. Ein Tangentialbündel  $TM$  ist in diesem Sinn ein Vektorbündel  $(TM, M, \pi)$  mit Faser  $\mathbb{R}^m$ .

(c) Sei  $(X, B, \pi)$  ein Faserbündel. Ein (globaler) Schnitt ist eine stetige Abb.  $f: B \rightarrow E$  s.d.  $\pi \circ f(x) = x$  für alle  $x \in B$ .



Ein Beispiel ist der Nullschnitt des Tangentialbündel

$$f: M \rightarrow TM, f(p) := (p, 0) \in T_p M.$$

Jedes Vektorfeld auf  $M$  ist ein Schnitt des Tangentialbündel.

Def 1.5 Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abb für  $r \geq 1$ . Eine Tangentialabb.

von  $f$  ist eine Abb definiert von

$$Tf: TM \rightarrow TN, (p, [v]) \mapsto (f(p), [f_*v])$$

Wie früher gezeigt, die lokale Darstellung von  $Tf$  um  $p$  und die Ableitung der lokal Darstellung von  $f$  übereinstimmen, d.h.

$$\sigma_{\xi} \circ T_p f \circ \sigma_p^{-1} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \quad \forall p \in M$$

Karten  $(U, \varphi)$  um  $p$   
 $(V, \psi)$  um  $\xi = f(p)$ .

Die Kettenregel gilt auch:  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ .

## Riemannsche Mnfk.

Ein riemannsche Mnfk ist eine differenzierbare  $n$ -dim. Mnfk.  $M$  mit einer Funktion  $g$ , die jedem Tangentialraum  $T_p M$  für  $p \in M$  ein Skalarprodukt zuordnet, d.h. eine positiv definite, symmetrische Bilinearform

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

die differenzierbar von  $p$  abhängt (d.h.  $M \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar).  
 $p \mapsto g_p(v_p, w_p)$

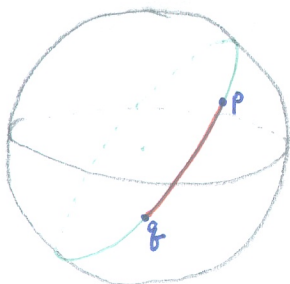
Sei  $(M, g)$  ein riemannsche Mnfk. Für  $p, \xi \in M$ , kann man dann

den Abstand von  $p$  nach  $\xi$  definieren durch

$$d(p, \xi) = \inf \{ d_g(p, \xi) : \gamma: [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = \xi \},$$

wobei  $d_g(p, \xi) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{g_{\gamma(t)}} dt$ .

$\gamma' =: T\gamma$ , Tangentialabb. von  $\gamma$ .



$p, \xi \in S^2$ , dann ist

$d(p, \xi) =$  die Bogenlänge zwischen  $p, \xi$ .