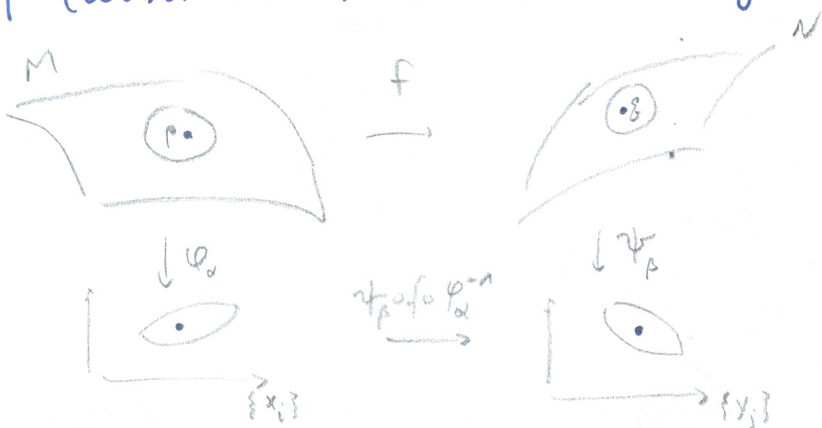
Abschnitt 1.2 Lokale Eigenschaften der Differenzierbare Abbildungen

(in Verbindung mit dem Satz von der Umkehrabbildung)

Def. 1.1 Seien M, N C^r-Mfken $(1 \leq r \leq \infty)$ und $f: M \to N$ eine stetige Abbildung. f heißt eine C^k-Abbildung, wenn alle ihrer lokalen Darstellungen durch Karten von M, N C^k-Abbildungen sind (wobei $k \leq r$). Eine C^∞-Abbildung nennt man auch glatt.



Genauer gesagt, seien $p \in M$, $q = f(p) \in N$. Seien $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ bzw. (V_β, ψ_β) eine Karte um p bzw. q. Betrachte

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta),$$

welche eine Abb. zwischen offene Mengen in eukl. Räumen ist, d.h. mit Koordinaten $\{x_1, .., x_m\}$ bzw. $\{y_1, .., y_n\}$ in M bzw. N ist

$$\left.\begin{array}{lll} y_1 = (\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_1 (x_1, \dots, x_m) & & 1\text{te - Komponente} \\ y_2 = (\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_2 (x_1, \dots, x_m) & & 2\text{te - } \quad '' \\ \vdots & & \vdots \\ y_n = (\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_n (x_1, \dots, x_m) & & n\text{te - } \quad '' \end{array}\right\} \text{ von } \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

f heißt eine C^k-Abb. um p, wenn alle der obigen Funktionen C^k sind.

Bemerkung: Die Def 1.1 ist von der Wahl der Karten unabhängig.

Def. 1.2 Seien M eine m-dim. C^r-Mnfk, $U \subset M$ eine offene Menge und $f: U \to \mathbb{R}$ eine stetige Abb. f heißt eine C^k-Funktion in U $(k \leq r)$, wenn für jede Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ mit $U \cap U_\alpha \neq \phi$, die Abb

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \mathbb{R}$$

eine C^k-Abb ist. Die Menge alle C^k-Funktionen in U bezeichnen wir mit $C^k(U)$.

Def. 1.3 Die Matrix

$$D(\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)} =: \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi_\alpha(p)} \qquad (*)$$

nennt man die Jacob-Matrix von f um p in Form von lokalen Koordinaten. Der Rang von $(*)$ heißt den Rang von f um p, welchen wir mit

$$(\operatorname{rank} f)_p = \operatorname{rank} D(\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$$

bezeichnen.

Bemerkung (i) $(\operatorname{rank} f)_p \leq \min(\underset{\dim M}{m}, \underset{\dim N}{n})$.

(ii) Der Rang ist von der Wahl der Karten unabhängig.

(iii) (Hag) Die Identität und die Konstant sind C^∞-Abbildungen. (Hag)

(iv) (Hag) Sind $f: M \to N$, $g: N \to P$ C^k-Abbildungen, so ist

$$g \circ f : M \to P$$

eine C^k-Abb.

Def 1.4 Es seien M, N C^r-Mfkn und $f: M \to N$ ein Homöom. f heißt einen C^r-Diffeomorphismus, wenn f und ihre Inverse f^{-1} C^k $(k \leq r)$ sind. Gibt es einen Diffeom. zwischen M und N, so sagt man M und N seien diffeomorph.

Eigenschaften der differenzierbare Abbn. auf Mfkn können ähnlich wie Funktionen in euklidischen Räumen untersucht werden. Dabei spielt die lokale Linearisierung eine wichtige Role, um die Analysis fortzusetzen. Einer der wichtigsten Sätze ist der Satz von der Umkehrabbildung:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei C^r um $p \in \mathbb{R}^n$ und $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) = n$.

$\Rightarrow$ f ist ein lokaler C^r-Difeom. um p.

Wir wollen nun den Satz auf Mfkn. erweitern.

Betrachte $f: M \to N$ eine C^r-Abb, wobei M bzw. N eine C^r-Mfk. der Dimension m bzw. n. Ist die lokale Darstellung $\bar{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ von f um $p \in M$ linear, d.h. mit $y := \bar{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

so gilt $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = (a_{ij})$. Mit geeigneten Koordinaten in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, ist eine lineare Abb. $\bar{f}$ mit $\operatorname{rank} \bar{f} = d$ der Form:

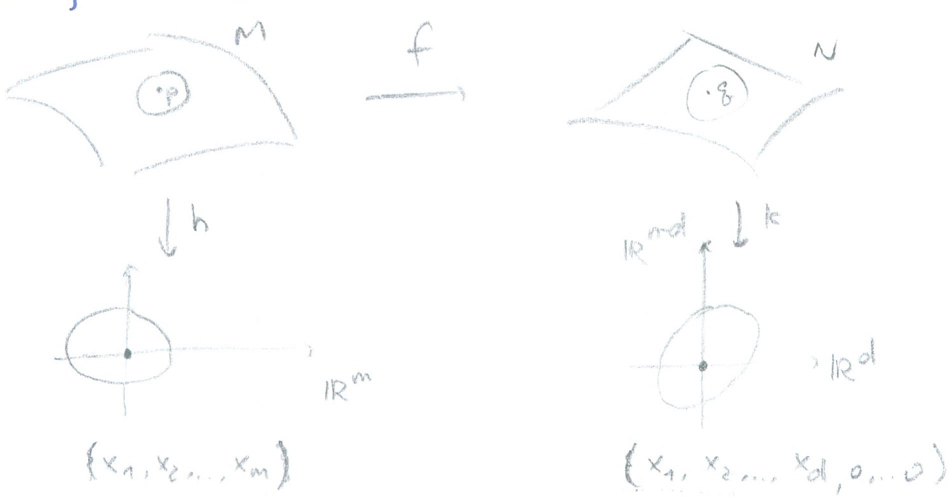
$$\bar{f}: \underbrace{(x_1, \dots, x_m)}_{\in \mathbb{R}^m} \longmapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_d, 0, \dots 0)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Im Allgemein, haben wir

Satz 1.5 (Rangsatz) Seien $\overset{\dim m}{M}$, $\overset{\dim n}{N}$ C^r-Mnfkn und $f: M \to N$ C^r-Abb.

Ist $\operatorname{rank} f = d$ in einer Umgebung von $p \in M$, so existieren eine Karte (U, h) um p und eine Karte (V, k) um $q = f(p)$ s.d. die lokale Darstellung $\bar{f} = k \circ f \circ h^{-1}$ eine Umgebung des Ursprungs in $\mathbb{R}^m$ surjektiv in eine Umgeb. der Ursprungs in $\mathbb{R}^n$ abbildet, und weiter gilt

$$k \circ f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots 0).$$



Beweis. Seien φ, ψ zwei Kartenabb.n. in M, N sodass,

$$\bar{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \bar{f}(0) = 0 \text{ ist.}$$

$(\operatorname{rank} f)_p = d \Rightarrow$ mit einer Neuordnung von Koordinaten in $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ $\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ $d \times d$-Teilmatrix, nicht singulär

Definiere $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_d(x), x_{d+1}, \dots, x_m) \Rightarrow h(0) = 0, \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \overset{d \times d}{\boxed{\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}}} & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Da $\det \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \det \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)_{d \times d} \neq 0$ ist, ist h ein lokaler C^r-Diffeom. um 0.

Sei $h: \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\Omega}} \xrightarrow{\cong} \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\Omega'}}$, wobei Ω, Ω' Umgebungen um 0 in $\mathbb{R}^m$ sind.

Betrachte $g := \bar{f} \circ h^{-1} : \Omega' \to \mathbb{R}^n$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R}^n \\ & \mathbb{R}^m \arrow[u, "g = f\circ h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$(x_1 \dots x_m)$ $\quad$ $(f_1(x), \dots, f_n(x))$

$(z_1 \dots z_m) = (f_1(x) \dots f_d(x), x_{d+1} \dots x_m)$

$$(z_1, \dots, z_m) \xmapsto{g} (z_1, \dots, z_d, g_{d+1}(z), \dots, g_n(z))$$

Dann ist $g(0) = 0$ und

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & \\ * & \frac{\partial g_{d+1}}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{d+1}}{\partial z_m} \\ & \vdots & & \\ & \frac{\partial g_n}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial z_m} \end{pmatrix}_0 .$$

Aber $\operatorname{rank} g = \operatorname{rank} f = d$. Es folgt

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)_0 = 0, \qquad \forall\, d+1 \le i \le n,\ d+1 \le j \le m. \qquad (*)$$

Definiere $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_d, y_{d+1} - g_{d+1}(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0), \dots, y_n - g_n(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0))$$

$$\Rightarrow \quad k(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial k_i}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}.$$

Man sieht

$$k \circ f \circ h^{-1}(\underbrace{z_1, \dots, z_m}_{\in \Omega' \subset \mathbb{R}^m}) = (z_1, \dots, z_d, \underbrace{g_{d+1}(z) - g_{d+1}(z_1, \dots, z_d, 0, \dots, 0)}_{=0}, \dots, \underbrace{g_n(z) - g_n(z_1, \dots, z_d, 0, \dots, 0)}_{=0})$$

für $|z_j| < \varepsilon$, $d+1 \le j \le m$.

$\boxed{\equiv}$ Satz 1.5

Korollar 1.6 Es sei $f : M \to N$ eine C^r-Abb. und $(\operatorname{rank} f)_p$ habe maximalen Rang, d.h. $(\operatorname{rank} f)_p = \min(m, n)$. Dann gilt:

(dim m, n)

(i) Ist $m \le n$, so bildet f eine Umgeb. von p in M injektiv in eine m-dimensionalen C^r-Teilmnfk. von N ab;

(ii) Ist $m \ge n$, so existiert eine Umgeb. V von $q = f(p)$ in N, s.d. für jeden Punkt $q' \in V$, das Urbild von q' eine $(m-n)$-dimensionale C^r-Teilmnfk von N ist.

Beispiel 1.7 Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f: M \to \mathbb{R}^n$ sei eine C^r-Abb, mit $f(p) := (f_1(p), \dots, f_n(p))$, $\forall p \in M$. Ist $(\operatorname{rank} f)_p = d$ für alle $p \in M$, so ist die Menge M_1 der Lösungen von

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = b_1, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = b_n, \end{cases} \qquad b_1 \dots b_n \text{ ~~bestim~~ Konstant},$$

entweder eine leere Menge oder eine C^r-Teilmfk. der Dimension $(m-d)$ in M, und weiter ist M_1 abgeschlossen in M.

(Es folgt $T = \{(x,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 : x \perp v\}$ für $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ ist eine 4-dim^{le} Teilmfk. von $\mathbb{R}^6$ ist. (vgl. Beispiel 1.12, Abschn. 1.1))

Als nächstes, untersuchen wir globale Eigenschaften der diff. Abbn.

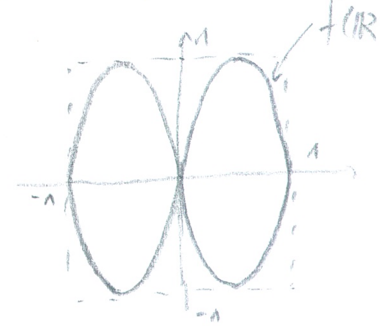
Def. 1.8 Sei M bzw. N eine C^r-Mfk der Dimension m bzw. n und $f: M \to N$ sei eine C^k $(1 \le k \le r)$ Abb. f heißt eine <u>C^k-Immersion</u>, wenn $(\operatorname{rank} f)_p = m$ $(m \le n)$ für alle $p \in M$, und f heißt eine <u>C^k-Submersion</u>, wenn $(\operatorname{rank} f)_p = n$ $(m \ge n)$ für alle $p \in M$. Ist $f: M \to f(M)$ ein Homöom. und eine C^k-Immersion, so ist f eine <u>C^k-Einbettung</u>.

Bemerkung 1.9 (i) Aus Korollar 1.6 folgt, dass für eine Submersion $f: M \to N$, das Urbild $f^{-1}(q)$ $(q \in f(M))$ eine $(m-n)$-dim^{le} Teilmfk von M ist.

(ii) Für eine Immersion $f: M \to N$, ist das Bild $f(M)$ jedoch nicht immer eine Teilmfk. von N, auch wenn die Immersion ~~nur~~ injektiv ist.

Beispiel 1.10 (a) Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\sin x, \sin(2x))$.

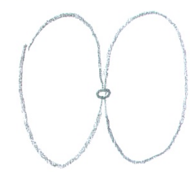
Da $(\operatorname{rank} f)_x = 1$ $\forall_{x \in \mathbb{R}}$, ist f eine C^∞-Immersion. Aber $f(\mathbb{R})$ ist keine Mnfk.



Wenn man f auf $(0,2\pi)$ beschränkt, ist

$$f: (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

eine injektive C^∞-Immersion, aber $f((0,2\pi))$ ist noch keine Mnfk.



Ist f jedoch auf $(0,\pi)$ beschränkt, so ist

$$f: (0,\pi) \to f((0,\pi)) \subset \mathbb{R}^2$$

eine Einbettung und folglich ist $f((0,\pi))$ eine Mnfk.

(b) $f: \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $f(t) := (e^{i\alpha t}, e^{i\beta t})$, wobei $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.

(Hag) Man prüft, dass f eine injektive Immersion ist, aber f ist keine Einbettung, und $f(\mathbb{R})$ ist keine Teilmnfk. von $S^1 \times S^1$. f ist als irrationaler Fluss auf Torus bekannt.

Satz 1.11 Es sei M kompakt und $f: M \to N$ sei eine injektive C^k-Immersion. Dann ist f eine C^k-Einbettung.

Bisher haben wir über die globale Eigenschaften von f mit max. Rang (nicht singulären Fall) diskutiert. Den singulären Fall (wobei f keinen max. Rang besitzt) lassen wir später im Abschnitt 1.4.