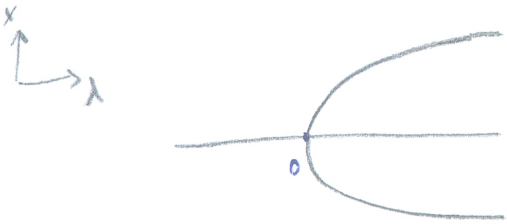
3.2.1 Die Pitchfork-Bifurkation

Es sei $f(x,\lambda) = x^3 - \lambda x \quad , \quad x, \lambda \in \mathbb{R}$. $\qquad (*_P)$



[Bifurkationsdiagramm]

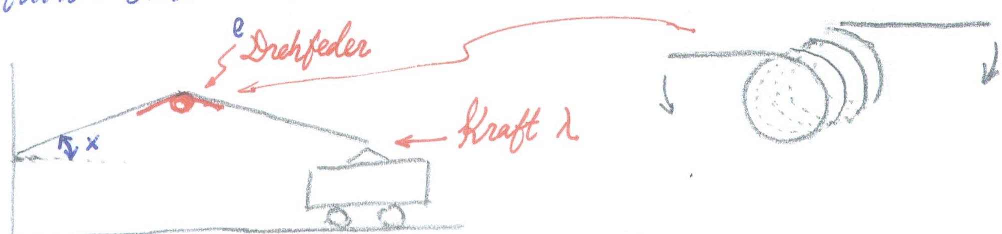
die Nullstellen von f in (x,λ)-Ebene.

$n(\lambda) = \#$ Nullstellen von f, für λ. $\qquad 1 \longrightarrow 3$

$\lambda < 0 \qquad \lambda > 0$

(a) Ein Beispiel der Pitchfork-Bifurkation

Betrachte ein System das aus 2 Stäben besteht, die miteinander durch eine Nadel verbunden sind.



das Potenzial: $\quad V(x,\lambda) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{von Drehfeder}} + \underbrace{2\lambda(\cos x - 1)}_{\text{von } \lambda} \qquad (*_D)$

die Gleichgewichte: $\quad g(x,\lambda) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,\lambda) = x - 2\lambda \sin x$

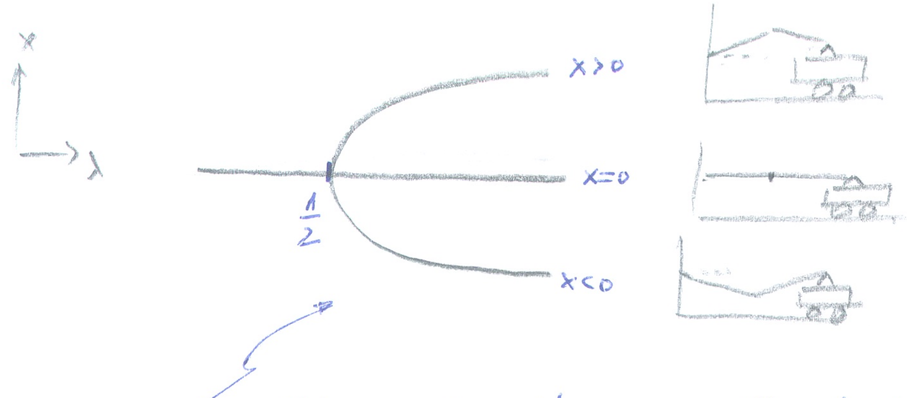
(Hag) $\quad (x_0, \lambda_0) = (0, \frac{1}{2})$ ist ein Gleichgewicht und

$$g(x,\lambda) = \frac{x^3}{6} - 2(\lambda - \tfrac{1}{2})x + \text{h.o.t.} \qquad x^5,\ (\lambda-\tfrac{1}{2})^2 x, \dots \text{ höher}$$

$\xRightarrow[\substack{\lambda \rightsquigarrow a(\lambda - \frac{1}{2}) \\ x \rightsquigarrow bx}]{\text{lineare Koordinatentransf.}} \quad g(x,\lambda) = x^3 - \lambda x + \text{h.o.t.}$

$\Big\downarrow$ ... (vgl. (b))

$$f(x,\lambda) = x^3 - \lambda x$$



das Bifurkationsdiagramm für $(*_D)$

(b) Endliche Bestimmtheit und Normalform

? Wie wichtig ist das „h.o.t",

? Inwiefern bestimmt das n-te Taylorpolynom für kleines n, das qualitative Verhalten von $g(x,\lambda)=0$, unabhängig vom Restglied.

Für die Pitchfork-Bifurkation haben wir:

<u>Satz 3.1.9</u> Es sei (x_0, λ_0) ein Bifurkationspunkt für $g(x,\lambda)=0$ sodass

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0 \;, \quad g_{xxx}\, g_{\lambda x} < 0 \quad \left(\text{alle bewertet um } (x_0,\lambda_0)\right)$$

Dann ist der Fluss von g äquivalent zu f von $(*_p)$. (Def.)

D.h. es gibt

(i) einen lokalen Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ der Form

$(x,\lambda) \mapsto (X(x,\lambda), \Lambda(\lambda))$, der $(0,0)$ in (x_0,λ_0) abbildet;

(ii) eine Abbildung $S(x,\lambda) > 0$

sodass

$$S(x,\lambda)\, g(X(x,\lambda), \Lambda(\lambda)) = x^3 - \lambda x = f(x,\lambda)$$

in einer Umgebung von $(0,0)$. Weiter gilt $X_x(x,\lambda) > 0$, $\Lambda'(\lambda) > 0$.

Insbesondere ist $n_g(\Lambda(\lambda)) = n_f(\lambda)$. wir zeigen ...

„$x^3 - \lambda x = 0$" wird als die Normalform der (supkritischen) Pitchfork-Bifurkation benannt.

Bemerkung 3.1.10 Im Satz 3.1.9 ist g äquivalent zu „$-x^3 - \lambda x$" falls $g_{xxx} g_{\lambda x} > 0$ ist.

„$-x^3 - \lambda x = 0$" wird als die Normalform der subkritischen Pitchfork-Bifurkation benannt.

$x^3 - \lambda x = 0$ „supkri Pitchfork-Bif."

$-x^3 - \lambda x = 0$ „subkri. Pitchfork-Bif."

Wir zeigen unter der Voraussetzung von Satz 3.1.9 für $(x_0, \lambda_0) = (0,0)$, $\exists$ glatte Abb.n. $M(x,\lambda)$, $\psi(\lambda)$ und $\varphi(x)$ definiert um $(0,0)$ s.d.

$$g(x,\lambda) = (\lambda - \varphi(x) x^2)(x - \psi(\lambda)) \cdot M(x,\lambda),$$

wobei $\varphi(0) > 0$, $\psi(0) = 0$ und $M(0,0) \neq 0$ ist.

Hag Es folgt dann, dass $n_g(\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{für } \lambda > 0 \\ 1 & \text{für } \lambda \leq 0 \end{cases}$, d.h. $n_g(\lambda) = n_f(\lambda)$.

Bw:

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \quad g_{xxx}\, g_{\lambda x} < 0$$

Let $s(x) = g(x, \mu x)$

(a) • $s(0) = 0$

$$s(0) = g(0,0) = 0 \quad ✓$$

• $s'(0) = 0$

$$s'(x) = g_x \cdot 1 + g_\lambda \cdot \mu = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \mu = 0. \quad ✓$$

• $s(x) = x^2 K(x, \mu)$

$$s(x) = s(0) + s'(0)\,x + \frac{s''(0)}{2} x^2 + \frac{s'''(0)}{6} x^3 + \dots$$

$$= 0 + 0 \cdot x + \frac{s''(0)}{2} x^2 + \dots$$

$$= x^2 \underbrace{\left(\frac{s''(0)}{2} + \frac{s'''(0)}{6} x + \dots \right)}_{= K(x,\mu)}$$

vergleichen

(b) • $K(0,0) = 0$

$\cancel{K(0,0) = \frac{s''(0)}{2}}$

$$s''(x) = g_{xx} + g_{\lambda x}\,\mu \Rightarrow s''(0) = 0 + g_{\lambda x}(0)\,\mu$$

$$K(x,\mu) = \boxed{K(0,0)} + K_x(0,0)\,x + \boxed{K_\mu(0,0)}\,\mu + \frac{K_{xx}(0,0)}{2} x^2 + \frac{K_{x\mu}(0,0)}{2} x\mu + \frac{K_{\mu\mu}(0,0)}{2} \mu^2 + \dots$$

$$\frac{s''(0)}{2} = \boxed{\frac{0}{2}} + \boxed{\frac{g_{\lambda x}(0)}{2}}\,\mu$$

$$\frac{s'''(0)}{6} x = \frac{g_{xxx}(0) + g_{\lambda xx}(0)\,\mu}{6} \cdot x \quad \dots$$

$$\left(s'''(x) = g_{xxx} + g_{\lambda xx}\,\mu \right).$$

$\Rightarrow \quad K(0,0) = 0,$

• $K_\mu(0,0) = \dfrac{g_{\lambda x}(0)}{2}$

• $K_x(0,0) = \dfrac{g_{xxx}(0)}{6}$

$K(0,0)=0, \quad K_\mu(0,0)=\frac{g_{\lambda x}(0)}{2}, \quad K_x(0,0)=\frac{g_{xxx}(0)}{6}$

$g_{\lambda x}(0)\, g_{xxx}(0) < 0$

I.F.T. $\Longrightarrow$ $\exists\ \mu=\mu(x)$ s.t. $K(x,\mu(x))=0$, $\mu(0)=0$,

also $K_x(0,0)+K_\mu(0,0)\mu'(0)=0 \Rightarrow \mu'(0)=-\frac{K_x(0,0)}{K_\mu(0,0)}>0.$

(c) • $\mu(x)=x\,\phi(x)$, wh. $\phi(0)>0$.

$\mu(0)=0, \quad \mu'(0)>0 \Rightarrow \mu(x)=\underset{0}{\underset{\|}{\mu(0)}}+\mu'(0)x+\dots = \underbrace{\mu'(0)}_{>0}x+\dots$

$= x\underbrace{\left(\mu'(0)+\frac{\mu''(0)}{2}x+\dots\right)}_{=\phi(x)}$

$\phi(0)=\mu'(0)>0.$ ✓

• $g(x,x^2\phi(x))=0$

$S(x)=g(x,\mu x)\overset{=0}{}, \ \mu=\mu(x)=x\phi(x) \Rightarrow g(x,x^2\phi(x))=0.$

~~$x^2 K(x,\mu) = x^2 K(x,\mu(x))$~~

~~Taylor $\Rightarrow$~~ $\cancel{g(x,\lambda)} = \cancel{g(0,0)}+\cancel{g_x(0,0)x}+\cancel{g_\lambda(0,0)\lambda}$

$+\cancel{\frac{g_{xx}(0,0)}{2}x^2}+\frac{g_{\lambda x}(0,0)}{2}\lambda x+\frac{g_{\lambda\lambda}(0,0)}{2}\lambda^2+$

$\cancel{g(x,x^2\phi(x))} = \frac{g_{\lambda x}(0,0)}{2}x^3\phi(x)+\frac{g_{\lambda\lambda}(0,0)}{2}x^4\phi(x)^2+\dots=0.$

$\Rightarrow \frac{g_{\lambda x}(0,0)}{2}\phi(x)+\frac{g_{\lambda\lambda}(0,0)}{2}x\phi(x)^2+\dots=0.$

$g(x,\lambda_0)=0 \overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow} g(x,\lambda)=(\lambda-\lambda_0)L(x,\lambda).$

$g(x,\lambda)=g(0,\lambda_0)+g_x\cdot x+g_\lambda\cdot(\lambda-\lambda_0)+\frac{g_{xx}}{2}x^2+\frac{g_{\lambda x}}{2}(\lambda-\lambda_0)\cdot x+\dots$

$$\Rightarrow \; g(x,\lambda) = \left(\lambda - x^2\phi(x)\right) L(x,\lambda).$$

(d) • $L(0,0)=0.$ $\quad L_x(0,0)\neq 0$

$$g(x,\lambda) = \cancel{g(0,0)} + \cancel{g_x(0,0)}\,x + \cancel{g_\lambda(0,0)}\,\lambda + \frac{\cancel{g_{xx}}(0,0)}{2}x^2 + \frac{g_{\lambda x}(0,0)}{2}\lambda x + \frac{g_{\lambda\lambda}(0,0)}{2}\lambda^2 + \cdots$$

$$\left(\lambda - x^2\phi(x)\right)\left(L(0,0) + L_x(0,0)\,x + L_\lambda(0,0)\,\lambda + \cdots\right)$$

$$= L(0,0)\lambda + L_x(0,0)\lambda x - L(0,0)\phi(x)x^2 - L_x(0,0)\phi(x)x^3 + \cdots$$

$$+ L_\lambda(0,0)\lambda^2 \quad \cdots - L_\lambda(0,0)\phi(x)\lambda x^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow L(0,0)=0, \qquad L_x(0,0) = \frac{g_{\lambda x}(0,0)}{2} \neq 0.$$

$$\xrightarrow{\text{I.F.T.}} \; \exists\, \psi(\lambda) \text{ s.t. } L(\psi(\lambda),\lambda)=0, \quad \psi(0)=0.$$

$$\Rightarrow g(x,\lambda) = \left(\lambda - x^2\phi(x)\right)\cdot\left(x-\psi(\lambda)\right) M(x,\lambda).$$

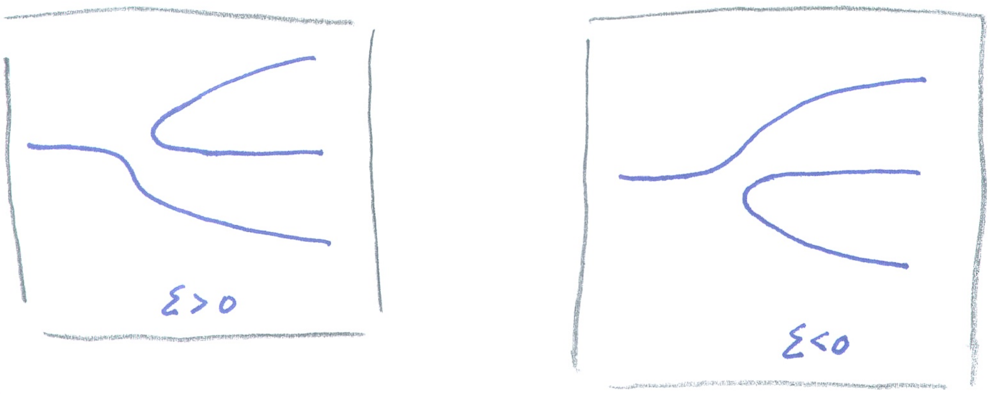
#

(c) Universal-Entfaltung und Verstörte Bifurkation

Betrachte

$$G(x,\lambda,\varepsilon) = x^3 - \lambda x + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad x,\lambda \in \mathbb{R},$$

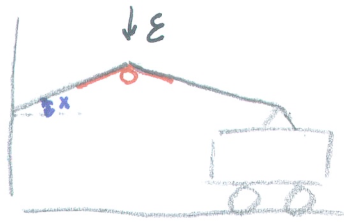
ein „verstörte" Pitchfork-Bifurkationsproblem.



Das Bifurkationsdiagramm ändert sich dramatisch ob $\varepsilon \gtreqless 0$.

* In der Anwendung ist es häufig gewünscht alle möglichen „verstörten" Bifurkationsprobleme von dem ursprünglichen zu betrachten und zu klassifizieren. Ein Beispiel davon ist:

<u>Beispiel 3.1.11</u> (der Wagen mit Drehfeder wieder besucht)



die Freistelle vom Drehfeder.

Imperfektion:

(a) die Drehfeder ist leicht unsymmetrisch; (δ)

(b) der Stab wiegt. (ε)

Potenzial: $V(x,\lambda,\varepsilon,\delta) = \dfrac{(x-\delta)^2}{2} + 2\lambda(\cos x - 1) + \varepsilon \sin x$

Gleichgewicht: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = x - \delta - 2\lambda \sin x + \varepsilon \cos x = 0.$

$$g(x,\lambda) = \frac{x^3}{6} - 2\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)x + (\varepsilon - \delta) + \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \text{h.o.t.}$$

ein „verstörtes" Pitchfork-Bp. mit Parametern δ, ε.

Def 3.1.12 Es sei $g(x,\lambda)=0$ ein Bifurkationsproblem. Eine k-parametrisierte Familie $G(x,\lambda,\alpha_1,\dots,\alpha_k)=0$ von Bifurkationsproblem; für $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$, heißt eine Störung von g, falls

$$G(x,\lambda,0,\dots,0)=g(x,\lambda).$$

Eine Störung G von g heißt eine Entfaltung von g, falls

$$\forall_{\varepsilon \text{ klein}} \ \forall_{p=p(x,\lambda,\varepsilon)} \ \exists \underbrace{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{!!\ \alpha \text{ abhängig von } \varepsilon}\in\mathbb{R} \quad \text{s.d.} \quad g+\varepsilon p \overset{\text{equiv.}}{\sim} G(\cdot,\alpha(\varepsilon))$$

Eine Entfaltung G ist eine Universal-Entfaltung, wenn G wenigste Parameter benötigt.

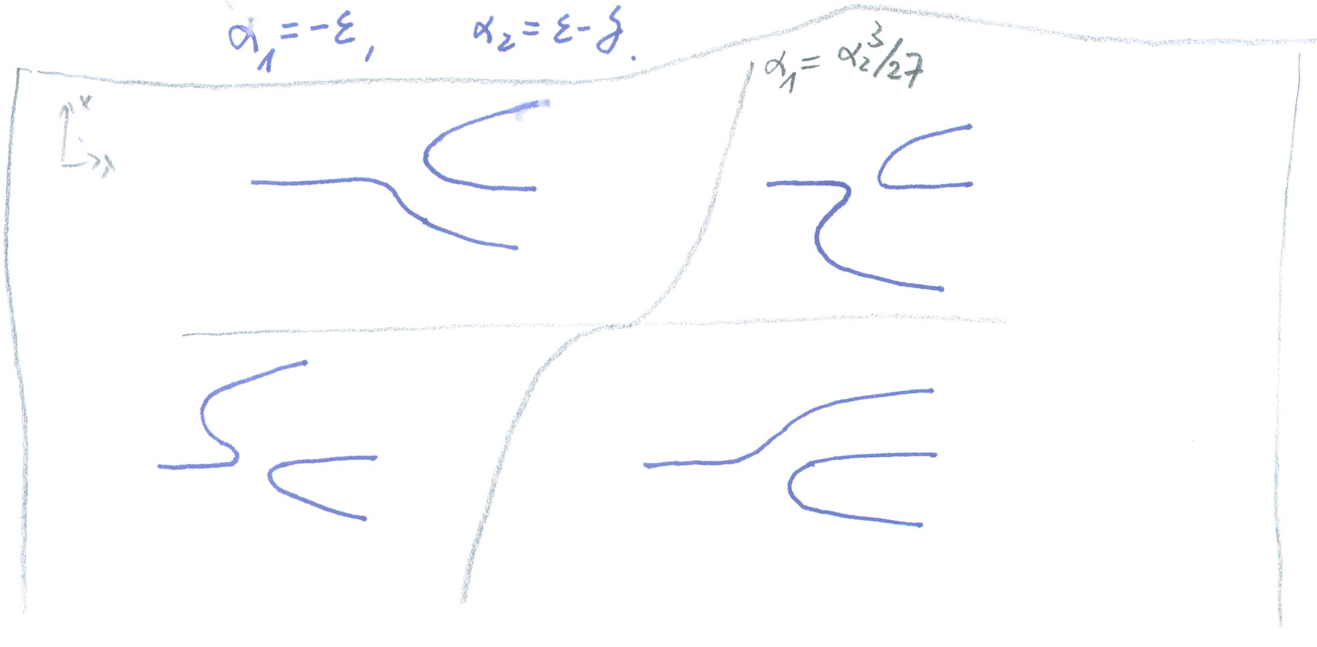
Im Fall von Pitchfork, ist

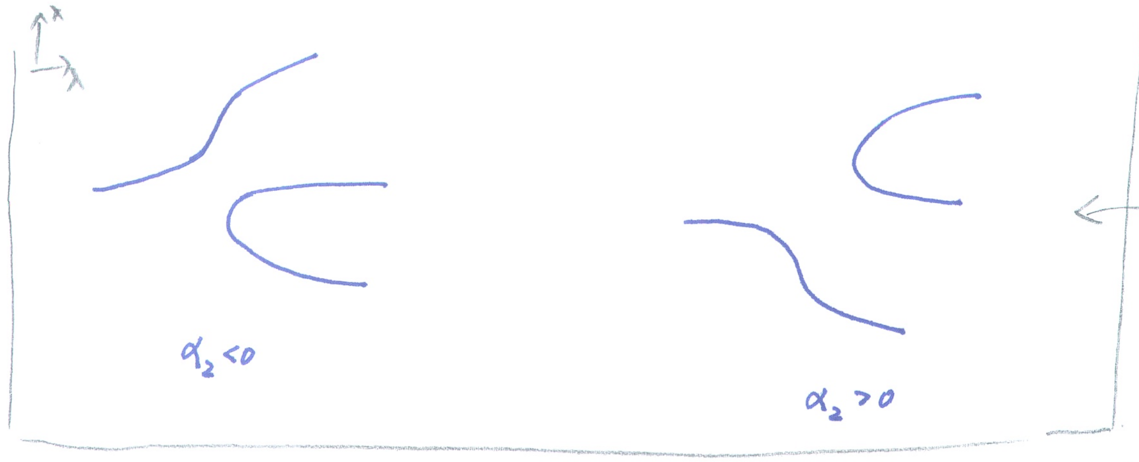
$$G(x,\lambda,\alpha)=x^3-\lambda x+\alpha_1+\alpha_2x^2, \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

eine Universal-Entfaltung für $f(x,\lambda)=x^3-\lambda x$. Für den Model betrachtet in Beispiel 3.1.11, ist $g(x,\lambda)$ äquivalent zu G für

Bifurkations diagram.

$$\alpha_1=-\varepsilon, \quad \alpha_2=\varepsilon-\delta.$$





für $\alpha_1 = \alpha_2^3/27$

Hag Was ist eine Universal-Entfaltung von $x^3 + \lambda x$?

die subkritische Pitchfork-Bifurkation.