**Beispiel 3.1.6** (Ein System, das strukturel stabil aber nicht Morse-Smale ist.)

- ein diskretes System auf Torus $T^2$, das von einem Diffeom. $f \in \mathrm{Diff}(T^2)$ erzeugt ist ...

⌈ ein Fixpunkt (bzw. per. Punkt) $p$ von $f$ heißt <u>hyperbolisch</u>, wenn $\forall \lambda \in \sigma(Df(p))$, $|\lambda| \neq 1$ gilt;

für einen hyperb. Fixpunkt (bzw. per. Punkt) $p$ von $f$, definiere

$$W_p^s = \{ q \in M : f^n(q) \to p, \text{ als } n \to \infty \} \quad \text{— stabile Mfk}$$

$$W_p^u = \{ q \in M : f^n(q) \to p, \text{ als } n \to -\infty \} \quad \text{— instabile ''}$$ ⌋

Betrachte $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineare Isomorph. in $\mathbb{R}^2$ gegeben von

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ wobei } a, b, c, d \text{ Ganzzahlen sind}$$

s.d. $\det L = 1$ und $L$ <u>hyperbolisch ist</u>. d.h. $|\lambda| \neq 1$ $\forall \lambda \in \sigma(L)$

- $\left.\begin{array}{l} \det L = \lambda_1 \lambda_2 = 1 \\ |\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < |\lambda_1| < 1, \ |\lambda_2| > 1.$

- $v_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix}$ bzw. $v_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor für $\lambda_1$ bzw. $\lambda_2$.

(Hag) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}^c$ sind irrational und $v_1$ (bzw. $v_2$) hat irrationalen Winkel mit $x$-Achse.

Sei $E^s = \langle v_1 \rangle$ $E^u = \langle v_2 \rangle$.

- $L(\mathbb{Z}^2) = (\mathbb{Z}^2)$, für $\mathbb{Z}^2 = \{ (m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.

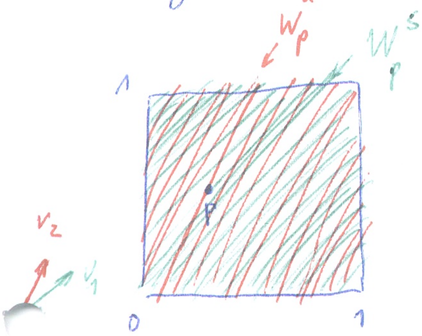
- $\rightsquigarrow \; f_L : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{[(x,y)] : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

  $[(x,y)] \longmapsto [L(x,y)]$

  $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2+m_1 \\ y_1 = y_2+m_2 \end{array}$ für $m_1,m_2 \in \mathbb{Z}$.

ist ein $C^\infty$-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

Bezeichne $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, die entsprechende Projektion.




$W_p^s = \pi(x+E^s)$ dicht in $T^2$.

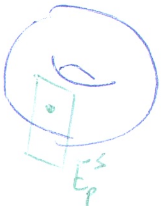
$W_p^u = \pi(x+E^u)$ dicht in $T^2$.

$\{W_p^s : p\in T^2\}$ die stabile Blätterung für $T^2$.

$\{W_p^u : p\in T^2\}$ " instabile Blätterung " ".

- Hyperbolizität von $f_L$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 & \quad & E^s & \xrightarrow{dL(x)} & E^s & \quad E^u \xrightarrow{\quad} E^u \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow d\pi_x & & \Big\downarrow d\pi_{L(x)} & \quad \Big\downarrow \qquad\quad \Big\downarrow \\
p & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f_L} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & & E_p^s & \xrightarrow{df_L(p)} & E^s_{f(p)} & \quad E_p^u \xrightarrow{\quad} E^u_{f(p)}
\end{array}$$




$$\begin{cases} \| df_p\, v \| = |\lambda| \cdot \|v\| & \forall v \in E_p^s \\ \| df_p\, w \| = |\lambda|^{-1} \|w\| & \forall w \in E_p^u \end{cases}$$ bezüglich der Metrik induziert von $\pi$.

$\Rightarrow \quad \forall_{z\in W_p^s} \quad d(f^n(z), f^n(p)) \to 0$ als $n\to\infty$

$\quad\;\; \forall_{z\in W_p^u} \quad d(f^n(z), f^n(p)) \to 0$ als $n\to -\infty$

$\Rightarrow$ jeder per. Punkt (einschließlich des Fixpunkt $\pi(0,0)$) von $f_L$ ist hyperbolisch und $W_p^s$ bzw. $W_p^u$ ist die stabile bzw. instabile Mnfk.

- Transversalität

$\forall_{p,q\in T^2}$. $W^s_p \pitchfork W^u_q$ und $W^s_p \cap W^u_q$ ist dicht in $T^2$.

- Periodische Punkte von $f_L$

Sei $\mathbb{Q}^2 = \{(x,y) : x,y\in\mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$; für $n\in\mathbb{Z}$ definiere

$$\mathbb{Q}_n^2 = \left\{ \left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}\right) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^2 = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}_n^2$ $\left[\text{Man sieht } L(\mathbb{Q}_n^2) = \mathbb{Q}_n^2.\right.$ Hey $\left.\right]$

$$\Downarrow$$

$$f_L(\pi(\mathbb{Q}_n^2)) = \pi(L(\mathbb{Q}_n^2)) = \pi(\mathbb{Q}_n^2)$$

d.h. $\pi(\mathbb{Q}_n^2)$ ist $f_L$-invariant, aber

$\pi(\mathbb{Q}_n^2) = \pi\left\{ \left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}\right) : 0\leq m_1\leq n,\ 0\leq m_2\leq n \right\}$ ist eine endliche Menge.

$\Longrightarrow$ jeder Punkt von $\pi(\mathbb{Q}_n^2)$ ist ein per. Punkt von $f_L$

$\Rightarrow$ $\pi(\mathbb{Q}^2) \subseteq \mathrm{Per}(f_L)$ ← Menge der per. Punkte von $f_L$.

Tatsächlich ist $\pi(\mathbb{Q}^2) = \mathrm{Per}(f)$, eine dichte Menge in $T^2$,

(da $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$ ist.)

$\leadsto$ $f_L : T^2 \to T^2$ ist ein Diffeom. mit unendlich vielen per. Orbits, jeder per. Orbit ist hyperbolisch mit 1-dim$^l$ stabiler (bzw. 1-dim$^l$ instabile) Mfk, und alle stabilen und instabilen Mfkn schneiden sich transversal. ($\Longrightarrow f_L$ ist nicht Morse-Smale.)

- $f := f_L : T^2 \to T^2$ ist strukturell stabil.

Sei $g \in \mathrm{Diff}^r(T^2)$ nah an $f$.

Dann gibt es $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.d. $G$ induziert $g$ auf $T^2$

⌜ $\left.\begin{array}{l} f\pi(x) = \pi L(x) \\ g \text{ nah an } f \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, y \in \mathbb{R}^2$ s.t. $g\pi(x) = \pi(y)$. Setze $G(x) := y$. ⌟

Sei $G = L + \Phi$, für eine $C^r$-kleine Abb. $\Phi$ in $\mathbb{R}^2$.

$L$ hyperbolisch $\Longrightarrow$ $L$ und $L+\Phi$ sind topo. konjugiert, d.h.

$\exists H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Homöom. s.d. $HL = GH$

$H$ induziert einen Homöom. $h : T^2 \to T^2$

$\Rightarrow \quad hf\pi = h\pi L = \pi HL = \pi GH = g\pi H = gh\pi$

$\xRightarrow{\pi \text{ surj}} \quad hf = gh$

# 3.1.6.

<u>Bemerkung 3.1.7.</u> Gegeben sei ein Diffeom. $f$ einer kompakten Mnfk $M$ der Dimension $n$, kann man kanonisch ein Vektorfeld $X$ auf einer $(n+1)$-dim'. Mnfk konstruieren, s.d. $f$ ein Schnitt für $X$ ist.

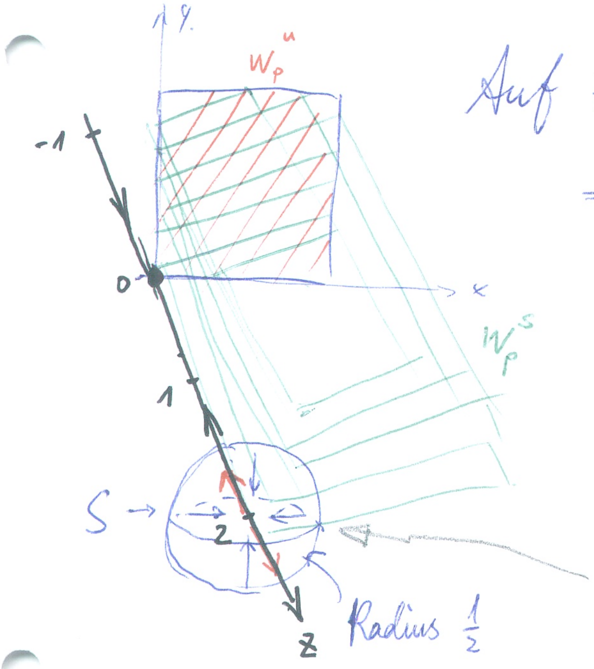
$f : T^2 \to T^2 \quad \longrightarrow \quad X : M^3 \to TM^3$.

**Beispiel 3.1.8** (dafür, dass strukturelle stabilen Systeme sind <u>nicht</u> dicht in $\mathrm{Diff}^r(M)$ oder $\mathfrak{X}^r(M)$.).

Betrachte $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ einen Isomorph.

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & & r\end{array}\right)=:\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix},$$

wobei $L$ wie in Beispiel 3.1.6 gegeben ist, und $0<r<1$.




Auf $z$-Achse ist $A$ anziehend gegen $0$;

$\Rightarrow$ • $\mathrm{Per}(f_A)\simeq\mathrm{Per}(f_L)$

$\quad (p,0)\longmapsto p$

• $W^s_{(p,0)}=W^s_p\times\mathbb{R}$, $\quad W^u_{(p,0)}=W^u_p$.

$\uparrow$ z-Achse

$C$ sei eine lineare Isom. um $b$, s.d. $b$ in $(x,y)$-Richtung anziehend und in $J$-Richtung abstoßend ist.

$J$ sei $\{(0,0,z)\in T^2\times\mathbb{R} : 0\le z\le 2\}$.

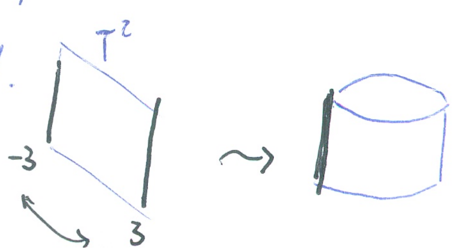
$f_A$ auf $T^2\times[-1,1]$

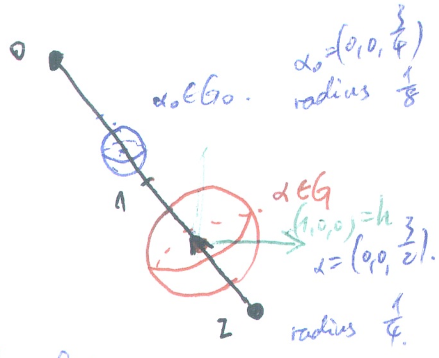
$C$ auf $S$

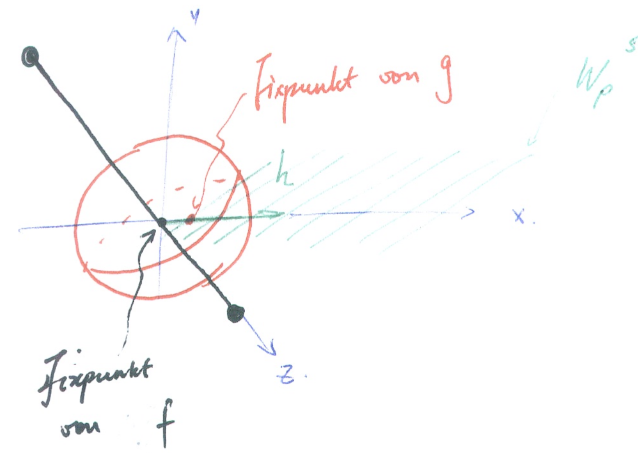
auf $J$

$\Big\}\xrightarrow{\text{Erweiterung}} f: T^2\times[-3,3]\to T^2\times[-3,3]$

s.d.






$G \cap f(G) = G \cap G_0 = \emptyset$.

define $g: T^2 \times S^1 \to T^2 \times S^1$

- $g = f$ outside $G$
- $g = f + \eta\phi h$ on $G$, where $h = (1,0,0)$, $\phi \geq 0$ $C^\infty$-function, $\operatorname{supp}\phi \subseteq G$. $\eta > 0$ small s.d. $g$ is a diffeom.

note: $h \pitchfork W_p^s$ $\forall p$.

Claim: $\forall$ diffeom. $g'$ close to $g$ in $C^r$-topo.

$\exists$ diffeom. $g''$ close to $g'$ in $C^r$-topo s.t. $g'' \not\sim g'$.

(i.e. $\forall g'$ close to $g$ is structurally unstabil.)

Pf: Let $g'$ be close to $g$. $\exists$ invariant torus $T' \subset T^2 \times S^1$ close to $T^2 \times \{0\}$.

$$T' \wr T^2 \times \{0\}$$

$f_L$ on $T^2$ is stru. stable $\Rightarrow$ $g'|_{T'}$ is with $f|_{T^2\times\{0\}} = f_L$ topo. conjugate.

the stable planes $W_p^{s\,\prime}$ are close to $W_p^s$ on $T^2 \times [-1,1]$

and fill up $T^2 \times (-1,1)$ densely.

$g' \in$ Case 1 the first fixedpoint of $g_h$ on x-axis belongs to $W_p^s$

$g' + \eta\phi h \in$ Case 2 " " doesn't " "

$\ast$

## 3.2. Bifurkationen

Der Ausdruck „Bifurkation" wurde ursprünglich von Poincaré verwendet um die „Spaltung" der Gleichgewichte in einer Familie der Differenzialgleichungen zu beschreiben:

$$\dot{x} = f_\lambda(x) \quad , \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; \lambda \in \mathbb{R}^k, \qquad (*)$$

wobei $\lambda$ häufig als den Bifurkationsparameter benannt ist.

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$.

$0 \notin D_x f_\lambda(x_0, \lambda_0) \overset{\text{S.I.F.}}{\Longrightarrow}$ die Gleichgewichte in einer Umgebung von $(x_0, \lambda_0)$ erfassen eine glatte „Kurve" $x = x(\lambda)$ durch $(x_0, \lambda_0)$.

$0 \in D_x f_\lambda(x_0, \lambda_0) \Longrightarrow$ mögliche „Spaltung" oder „Bifurkation" von $(x_0, \lambda_0)$.

(Hag) keine Bifurk. aber $0 \in D_x f_\lambda(x_0, \lambda_0)$

Ist eine qualitative Änderung tatsächlich aufgetreten, so nennt man $(x_0, \lambda_0)$ einen Bifurkationspunkt und $\lambda_0$ einen Bifurkationswert von $\lambda$.

Im Allgemein,

Def 3.1.8 Ein Wert $\lambda_0$ von $(*)$ für den der Fluss von $(*)$ nicht strukturell stabil ist, heißt einen Bifurkationswert von $\lambda$.

— ist jedoch eine unbefriedende Definition ...