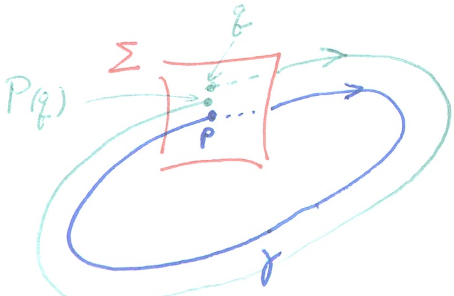
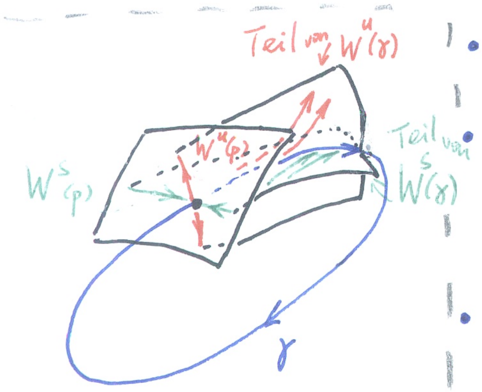
2.6. Periodische Orbits und Nichtwandernde Menge

Es sei $X \in \mathcal{X}^r(M)$ und φ der Fluss von X. Ein Punkt $p \in M$ heißt periodisch, falls $\varphi(T,p) = p$ für ein $T>0$. Die Trajektorie durch p: $\gamma = \{\varphi(t,p) : 0 \le t \le T\}$ nennt man einen periodischen Orbit. Betrachte einen periodischen Orbit γ von φ in $\mathbb{R}^m$. Sei Σ eine $(m-1)$-dimensionale Hyperfläche in $\mathbb{R}^m$ (ein Poincaré-Schnitt) sodass $\varphi(\cdot, q) \pitchfork \Sigma$ für alle $q \in \Sigma$. Den eindeutigen Schnittpunkt von Σ und γ bezeichnen wir mit p.



Es sei $U \subseteq \Sigma$ eine offene zusammenhängende Umgebung von p. Eine Abbildung $P: U \to \Sigma$ heißt eine Poincaré-Abbildung, falls



- $P(p) = p$;
- $P(U)$ ist eine Umgebung von p und $P: U \to P(U)$ ist ein Diffeomorphismus; und
- $\forall_{q \in U}$ gilt $P(q) = \varphi_\tau(q)$, wobei $\tau > 0$ die kürzeste Laufdauer bis $\varphi_t(q)$ wieder zu Σ zurückkehrt.

Stabilitätsanalysis durch Poincaré-Abb.

Eigenwerte von $DP(p)$ heißen die Multiplikatoren von γ.

(Haz) Multiplikatoren sind von p unabhängig.

Is $|\lambda| \neq 1$ für jeden Multiplikator von γ, so nennt man γ ein hyperbolischer periodischer Orbit.

Ein Punkt p heißt nichtwandernd für einen Fluss φ, falls für jede Umgebung U von p, es ein $t>0$ gibt sodass

$$\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Die Menge aller nichtwandernden Punkten heißt die nichtwandernde Menge, die als Ω_φ gezeichnet wird.

Offensichtlich sind Fixpunkte und periodische Orbits nichtwandernd, und die nichtwandernde Menge ist φ-invariant. Aber nicht alle φ-invariante Mengen bestehen aus nichtwandernden Punkten. (Hag)

Ein Punkt p ist ein ω-Grenzpunkt von x, falls es Punkte $\varphi_{t_1}(x), \varphi_{t_2}(x), \dots$ vom Orbit von x gibt s.d.

$$\varphi_{t_i}(x) \to p \quad , \text{als} \quad t_i \to \infty.$$

Ein Punkt p ist ein α-Grenzpunkt von x, falls es solche Folge gibt mit $\varphi_{t_i}(x) \to p$, als $t_i \to -\infty$.

Die ω-Grenzmenge (bzw. α-Grenzmenge) von x ist die Menge aller ω-Grenzpunkte (bzw. α-Grenzpunkte).

(Hag)
- Nichtwandernde Mengen und ω-(bzw. α-)Grenzmengen sind φ-invariant (und abgeschlossen)
- Punkte von Grenzmengen sind nichtwandernd.

Kapital 3. Strukturelle Stabilität und Bifurkationen

3.1. Strukturelle Stabilität

Ein System ist „robust", wenn es seine qualitativen Eigenschaften bewahrt gegen kleine Störungen oder kleine Änderungen von Funktionen die das System definieren.

Def 3.1.1 Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}^r(M)$ ist strukturell stabil falls es eine Umgebung U von X in $\mathcal{X}^r(M)$ gibt sodass für $Y \in U$, die Flüsse φ_X und φ_Y topologisch konjugiert sind.

Beispiel 3.1.2 Vektorfelder von linearen hyperbolischen Flüssen in euklidischen Räumen sind strukturell stabil.

Es sei $X \in \mathcal{X}^r(\mathbb{R}^m)$ von $\dot{x} = Ax$ gegeben, wobei A hyperbolisch ist.

Es sei $Y \in \mathcal{X}^r(\mathbb{R}^m)$ von $\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x)$ definiert, für $f \in C^r(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

A invertierbar $\Rightarrow$ $Ax + \varepsilon f(x) = 0$ besitzt eine eindeutige Lösung $\bar{x}$ in der Nähe von 0, für ausreichend kleines ε.

Linearisierung um $\bar{x}$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = (A + \varepsilon Df(\bar{x}))x$.

(Hag) (*) Ist ε ausreichend klein (bezüglich der Länge der Eigenwerte von A), so ist $(A + \varepsilon Df(\bar{x}))$ hyperbolisch mit gleichen Anzahl der Eigenwerte mit positiven (bzw. negativen) Realteil als A.

[stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von Einträgen der Mat[illegible]]

Satz von Hartman-Grobmann

$\Rightarrow$ Y und „ $\dot{x} = (A + \varepsilon Df(\bar{x}))x$ " sind topologisch konjugiert.

(*) $\Rightarrow$ „ $\dot{x} = (A + \varepsilon Df(\bar{x}))x$ " und „ $\dot{x} = Ax$ " sind topologisch konjugiert.
$\hat{}\, X$

Folglich ist X topologisch konjugiert mit Y, damit ist X strukturell stabil. $\boxed{}_{3.1.2.}$

Satz von Andronov-Pontryagin (Satz 3.1.3)

Ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$ ist strukturell stabil genau dann, wenn

(i) alle seiner kritischen Punkte sind hyperbolisch (stabil, instabil oder Sattelpunkte);

(ii) alle seiner periodischen Orbits sind hyperbolisch; und

(iii) es gibt keine Trajektorien die Sattelpunkte verbinden.

Bw „ $\Rightarrow$ "(i) Angenommen X hat einen nichthyperb. kri. Punkt p.

O.B.d.A. $p=0$ und das System um 0 habe die Form

$$(*_0) \qquad \dot{u} = Au + o(u), \qquad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei A einen Eigenwert λ mit $Re(\lambda) = 0$ hat. Betrachte ein ε-gestörte System von $(*_0)$

$$(*_p) \qquad \dot{u} = Au - \varepsilon u + o(u), \qquad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

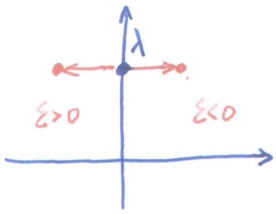
wobei $p=0$ ein kri. Punkt ist mit der Linearisierung

$$(*_\ell) \qquad \dot{u} = (A - \varepsilon I)u, \qquad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Wähle ε mit kleinem $|\varepsilon|$ sodass $(A - \varepsilon I)$ hyperbolisch ist.

z.B. $\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \min\{|Re(\mu)| : \mu \in \sigma(A), Re(\mu) \neq 0\}$.

Satz von Hartman-Grobman $\Rightarrow (*_p) \sim \underline{(*_\varepsilon)}$ ← von ε abhängig



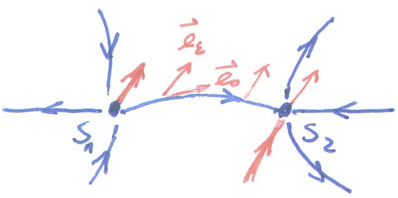
$\varepsilon \gtrless 0 \Rightarrow Re(\lambda - \varepsilon) \lessgtr 0$

Das heißt man findet in der $|\varepsilon|$-Umgebung von $(*_0)$ zwei unterschiedliche Systeme ($(*_\varepsilon)$ für $\pm\varepsilon$) die unterschiedliche Hyperbolizität um 0 haben.

$\Rightarrow$ $(*_0)$ ist nicht strukturell stabil. ↯

(ii) durch die Poincaré-Abb. ist (ii) ähnlich wie (i).

(iii) Angenommen es gibt eine Verbindung zwischen zwei Sattelpunkte durch eine Trajektorie. Es sei X gegeben von



$$(*_0) \quad \begin{cases} \dot x = f(x,y) \\ \dot y = g(x,y) \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Betrachte für $\varepsilon > 0$,

$$(*_p) \quad \begin{cases} \dot x = f(x,y) + \varepsilon g(x,y) \\ \dot y = g(x,y) - \varepsilon f(x,y) \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

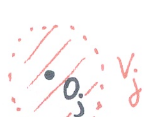
Es sei $\vec e_0 := (f, g)$, $\vec e_\varepsilon = (f + \varepsilon g, g - \varepsilon f)$, dann bildet $\vec e_\varepsilon$ mit $\vec e_0$ (um jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) einen nichtnull Winkel φ, da

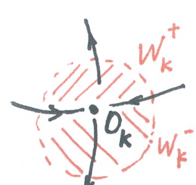
$$\sin\varphi = \frac{\| \vec e_0 \times \vec e_\varepsilon \|}{\| \vec e_0 \| \cdot \| \vec e_\varepsilon \|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} > 0 .$$

$\Rightarrow$ die Verbindung von S_1 nach S_2 ist „weggestört". ↯ X strukt. stabil.

„$\Leftarrow$" Vorbemerkung: ein hyperb. per. Orbit in $\mathbb{R}^2$ ist entweder stabil oder instabil.

Bezeichne per. Orbits mit $L_1, L_2, \dots$, kri. Punkte mit $O_1, O_2, \dots$





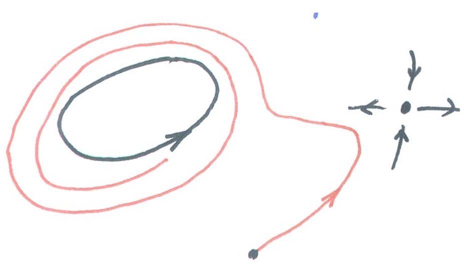
$\forall x \in U_i$ $\varphi_t(x) \to L_i$ als $t \to \infty$ (stab.), oder $t \to -\infty$ (instab.)

$\varphi_t(x) \to O_j$ $t \to \infty$ (stab.) oder $t \to -\infty$ (instab.)

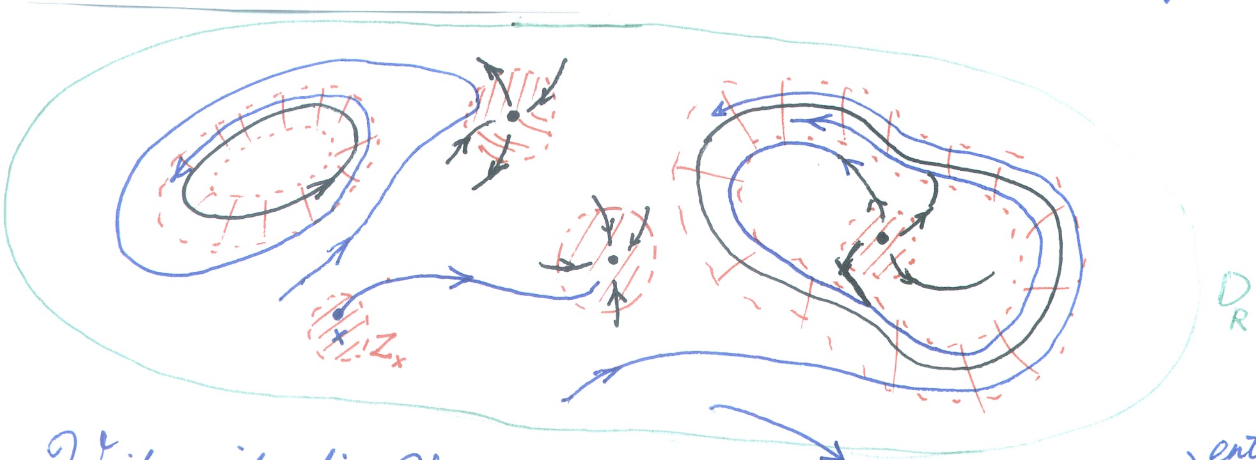
$\varphi_t(x)$ längs ↑ $\forall x \in W_k^+$ (Sattel)
$\varphi_t(x)$ längs ↓ $\forall x \in W_k^-$

Für alle anderen beschränkten Orbits (die nicht in U_i, V_j oder W_k liegen), tendenzieren sie zu einem per. Orbit L oder einem krit. Punkt O.

⌜ <u>Satz von Poincaré-Bendixson</u>: Eine nichtleere kompakte ω- (oder α-) Grenzmenge die keine krit. Punkte enthält, ist ein per. Orbit. ⌟



$\Rightarrow$ Gegeben eine große Kreisscheibe D_R, entweder verlässt ein Orbit D_R (nach einer endlichen Zeit) oder tendenziert zu einer Menge von U_i, V_j oder W_k.



Weiter ist dies Verhalten konsistent: $\forall_x$ $\exists$ Umgeb. Z_x s.d. entweder jeder Orbit der von Z_x startet verlässt D_R oder jeder tendenziert zu einer von U_i, V_j oder W_k.

Kompaktheit von $\overline{D_R}$ $\Rightarrow$ $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ endlich viele.

Folglich ist D_R von U_i's, V_j's, W_k's, Z_ℓ's (endlich) überdeckt, und in jeder dieser Mengen verhält der Fluss „gleichmäßig". Dieses Verhalten ist daher „robust" gegen kleine Störung. ☒

5.1.3.

<u>Satz 3.1.4 (von Peixoto)</u> Ein C^r-Vektorfeld auf einer kompakten 2-dimensionalen Mnfk M ist strukturell stabil g.d.w.

(i)~(iii) von Satz 3.1.3 und

(iv) die nichtwandernde Menge besteht aus kritischen Punkten und per. Orbits (ausschließlich).

⌈ <u>Bemerkung</u>: (iv) ist nötig um den irrationalen Fluss auf dem Torus auszuschließen. (Has) ⌋

Weiter ist die Menge von strukt. stabilen Vektorfelder offen und dicht in $\mathfrak{X}^r(M)$, falls M orientierbar ist.

Versuch in höherer Dimension bringt einem zu der Definition:

<u>Def 3.1.5</u> Ein System ist <u>Morse-Smale</u>, wenn

(i) kri. Punkte und per. Orbits sind endlich viele und alle hyperbolisch;

(ii) alle stabile und instabile Mnfkn schneiden sich transversal;

(iii) die nichtwandernde Menge besteht aus kri. Punkten und per. Orbits (ausschließlich).

Falsche Vermutungen:

Hufeisen-Abb. (a) strukturell stabil $\Leftrightarrow$ Morse-Smale;

(b) Morse-Smale Systeme sind dicht in $\mathrm{Diff}^1(M)$ oder $\mathfrak{X}^1(M)$;

Lorenz-Attraktor → (c) Strukturelle stabile Systeme sind dicht in " " .