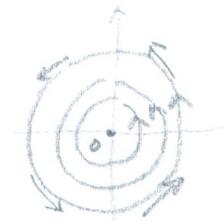
Fall 2: $i\beta \in \sigma(DX(p))$, $\beta \neq 0$

Betrachte $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben von

$$(N)\begin{cases} \dot{x} = -(x^2+y^2)x - y \\ \dot{y} = -(x^2+y^2)y + x \end{cases} \xrightarrow[\text{um } (0,0)]{\text{Linearisierung}} \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} (L)$$



$(0,0)$ ist ein kri. Punkt

$\sigma(DX(0,0)) = \{\pm i\}$

Wir zeigen (N) und (L) sind nicht topo. konjugiert um $(0,0)$.

Bw. $\pm i \in \sigma(DX(0,0)) \Rightarrow \exists$ periodische Orbits um $(0,0)$ für (L). Hag

Es sei φ (bzw. ψ) der Fluss von X (bzw. $T_{(0,0)}X$).

Ist φ, ψ (lokal um $(0,0)$) konjugiert, so $\exists\, h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lokal Homöom s.d.

$$\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x, t+T) = \varphi(x,t) \Leftrightarrow \psi(h(x), t+T) = \psi(h(x))$$

d.h.

$$\underbrace{\{x : \varphi(x,t+T) = \varphi(x,t)\}}_{\text{Per. Punkte von } \varphi} \underset{\text{lokal}}{\cong} \underbrace{\{y : \psi(y,t+T) = \psi(y,t)\}}_{\text{per. Punkte von } \psi}$$

Es ist genug zu zeigen (N) besitzt keine per. Orbits.

Wende die Polarkoordinaten für (N):

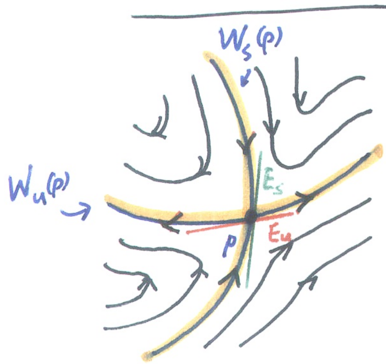
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (N) hat keine per. Orbits.

$r=0$ ist global stabil, d.h. $\forall (r,\theta)$, $(r(t), \theta(t)) \to 0$ als $t \to \infty$.

☑

§ 2.4 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten



Es sei $p \in \mathbb{R}^m$ ein hyperbolischer kritischer Punkt eines Vektorfelds $X: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Wie schon gezeigt, um p befindet sich E_s bzw. E_u, die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des linearisierten Vektorfelds T_pX.

Der Satz von stabilen Mfk besagt die Existenz von $W_s(p)$ und $W_u(p)$ mit $T_p(W_s(p)) = E_s$, $T_p(W_u(p)) = E_u$.

Def. 2.15 Für ein hyperbolischer kri Punkt p von X ist

$$W^s_{loc}(p) := \{x \in U : \underbrace{\varphi(x,t)}_{\in U\ \forall t>0} \to p \text{ als } t \to \infty\}$$

bzw.

$$W^u_{loc}(p) := \{x \in U : \underbrace{\varphi(x,t)}_{\in U\ \forall t<0} \to p \text{ als } t \to -\infty\}$$

, wobei U eine Umgeb. von p ist, eine lokale stabile bzw. instabile Mfk von p.

Die (globale) stabile bzw. instabile Mfk von p ist die Menge

$$W^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x,t) \to p \text{ als } t \to \infty\}$$

$$W^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x,t) \to p \text{ als } t \to -\infty\}$$

Bemerkung:

- $W^s_{loc}(p) \subseteq W^s(p)$, $W^u_{loc}(p) \subseteq W^u(p)$
- $W^s_{loc}(p)$, $W^u_{loc}(p) \neq \emptyset$
- $W^s(p)$, $W^u(p)$ sind beide φ-invariant
- $W^s_{loc}(p)$ ist nicht unbedingt $W^s(p) \cap U$
  $W^u_{loc}(p)$ " " $W^u(p) \cap U$ Hag.
- $W^s(p)$, $W^u(p)$ sind nicht im Allgemein Teilmfkn von $\mathbb{R}^m$. Hag.

Satz 2.16 (Satz von stabiler Mnfk) Es sei $p \in M$ ein hyperbolischer kritischen Punkt von $X: M \to TM$. Dann existiert eine lokale stabile (bzw. instabile) C^r-Mnfk $W^s_{loc}(p)$ (bzw. $W^u_{loc}(p)$) mit dem Tangentialraum E^s (bzw. E^u) um p (wobei E^s, E^u sind stabile, instabile Mnfk von T_pX).

Bw (Idee) lokale Eigenschaften $\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $p = 0 \in \mathbb{R}^m$, $X: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$(*) \quad \dot{x} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ hyperbolisch um } 0, \text{ d.h. } A := Df(0) \text{ ist hyp.}$$

Betrachte $\dot{x} = Ax + g(x)$. Dann ist die Lösung der Form

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} g(x(s))\, ds \qquad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Sei $x = (x_s, x_u) \in E^s \oplus E^u$. Für $t_0 = 0$, ist

$$x_s(t) = e^{tA_s} x_s(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_s} g_s(x(s))\, ds$$

Angenommen ist $x \in W^s_{loc}(0)$, d.h. $x(t) \to 0$ als $t \to \infty$. Daher ist $x_u(t)$ der Form

$$x_u(t) = -\int_t^\infty e^{(t-s)A_u} g_u(x(s))\, ds$$

Insgesamt erfüllt eine Lösung x von $(*)$

$$x(t) = e^{tA_s} x_s(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_s} g_s(x(s))\, ds - \int_t^\infty e^{(t-s)A_u} g_u(x(s))\, ds$$

Sei $a_s \in E^s$ festgewählt. Definiere $T: C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ durch

$$(Tx)(t) := e^{tA_s} a_s + \int_0^t e^{(t-s)A_s} g_s(x(s))\, ds - \int_t^\infty e^{(t-s)A_u} g_u(x(s))\, ds.$$

Dann ist $Tx = x \iff x$ löst $(*)$ und $x \in W^s_{loc}(0)$. D.h.

$$W^s_{loc}(0) = (T - Id)^{-1}(0)$$

$\#$ 2.16.

§ 2.5 Zentrale Mannigfaltigkeiten

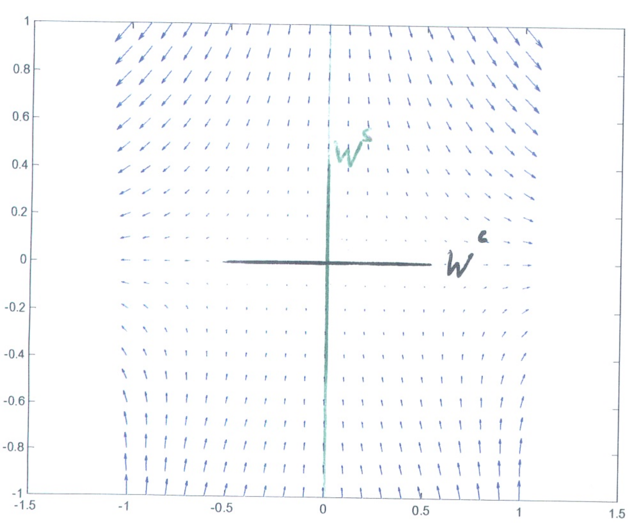
Im Fall eines nichthyperbolischen kritischen Punktes p hat man einen zusätzlichen „Teil" um p – eine zentrale Mannigfaltigkeit, wo der Fluss sich kompliziert verhalten kann.

Beispiel 2.17 Betrachte $\begin{cases} \dot{x} = xy + x^3 \\ \dot{y} = -y - x^2 y \end{cases}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Linearisierung um $(0,0)$ führt zu $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^c = E_{-1} \oplus E_0$.

Eine zentrale Mannigfaltigkeit um $(0,0)$ ist eine (flussinvariante) Mnfk W^c, die um $(0,0)$ tangential zu E^c ist.



$W^s = \{ (0,y) : \dot{y} = -y \} \simeq E^s$

$W^c = \{ (x,0) : \dot{x} = x^3 \} \simeq E^c$

Man sieht der Fluss in W^c ist in diesem Fall von $(0,0)$ abstoßend.

Afg Geben Sie ein Beispiel, wo der Fluss in W^c von $(0,0)$ anziehend ist.

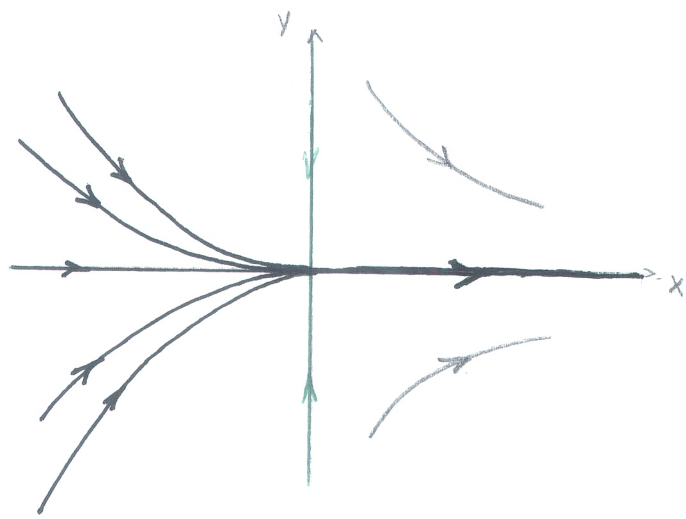
Die Nichteindeutigkeit und der Verlust der Glattheit der zentralen Mnfkn.

Beispiel 2.18 Betrachte $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Lösungen haben die Form $x(t) = \dfrac{x_0}{1-tx_0}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Die Lösungskurven sind Graphen von

$$y(x) = \left(y_0 e^{-\frac{1}{x_0}}\right) e^{\frac{1}{x}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



Für $x<0$ ist $(x,y) = (x(t), y(x(t))) \longrightarrow (0,0)$ als $t \to \infty$, $\forall_{x_0,y_0}$

Für $x>0$ ist $(x,y) \to (0,0)$ als $t \to \infty$, nur wenn $y_0 = 0$, d.h. die x-Achse.

$\Rightarrow$ Man erhält eine zentrale Mnfk zu jedem (x_0, y_0) mit $x_0 < 0$, wo man die entsprechende Kurve (auf der linken Ebene) mit der positiven x-Achse zusammen klebt.

Jede dieser Mnfkn ist auch eine C^∞-Teilmnfk von $\mathbb{R}^2$ (die ist jedoch nicht analytisch).

Beispiel 2.19 Betrachte $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = by \end{cases}$, $b>a>0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{y}{x} \Rightarrow$ Die Lösungen liegen auf den Graphen von

$$y(x) = C|x|^{\frac{b}{a}}$$

Man merkt $y=y(0)$ ist nicht C^∞-differenzierbar. In der Tat,

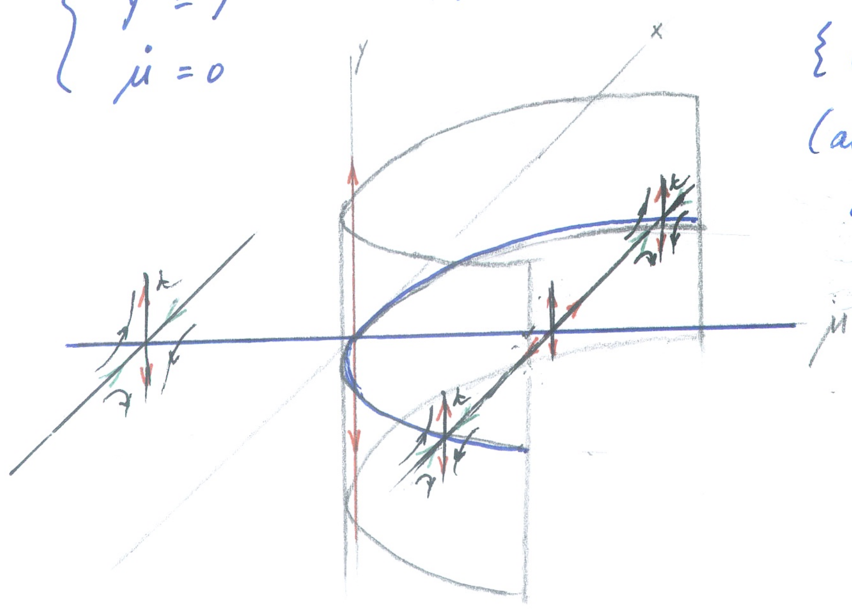
ist $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$ mit $r < \frac{b}{a} < r+1$, so ist y C^r- aber nicht C^{r+1}-diff;

ist $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$, so ist y $C^{\frac{b}{a}-1}$-diff.

Nun betrachten wir das System

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = y \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (x,y,\mu) \in \mathbb{R}^3$$

kritische Punkte sind $\{(0,0,\mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\{(x,0,\mu) : \mu = x^2\}$ (auch nicht hyperbolisch da $\dot{\mu} = 0$).



Für jedes $c \in \mathbb{R}$, ist $\mu_c := \{(x,y,c) : x,y \in \mathbb{R}\}$ eine invariante Menge.

Beschränkt auf μ_c ist $(0,0,\mu_c)$ für $\mu_c < 0$ ein Sattel, für $\mu_c > 0$ eine Quelle, $(\pm\sqrt{\mu_c}, 0, \mu_c)$ für $\mu_c > 0$ ein Sattel, wessen zentrale Mnfkn einfach zu bestimmen sind (Hag). Für $(0,0,0)$ ist etwa komplizierter.

Man sieht die parabelförmige Oberfläche P trennt $\mathbb{R}^3$ in 3 invariante Mengen: (Hag)

$$\{(x,y,\mu): \mu<x^2\},\ \overset{P}{\{(x,y,\mu): \mu=x^2\}},\ \{(x,y,\mu): \mu>x^2\}$$

Es sei M eine zentrale Mnfk für $(0,0,0)$.

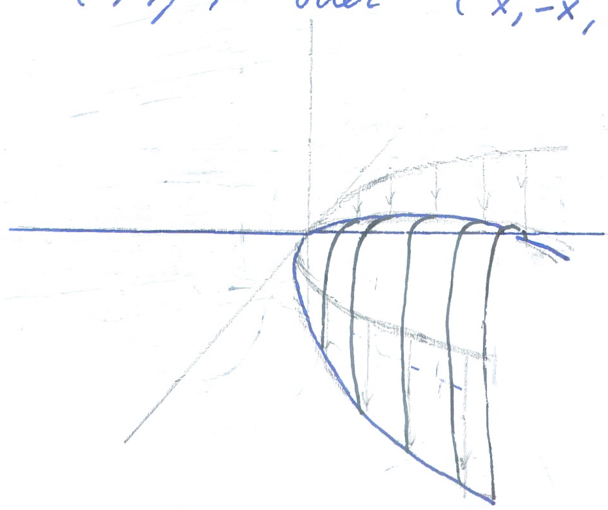
$\Rightarrow$ M schneidet sich mit P

$$\xRightarrow[\text{abstoßend}]{y\text{-Richtung}} M \subseteq (x,\mu)\text{-Ebene} \xRightarrow[\text{zu } (x,\mu)\text{-Ebene}]{M \text{ tangential}} M = (x,\mu)\text{-Ebene}.$$

Nun aber ändern wir das System mit $\dot{y} = y + x^4$.

Dann ist der kritische Punkt der Form

$(0,0,\mu)$ oder $(x,-x^4,x^2)$



„gedrückt Forke"

Wir behaupten (ohne Beweis) die zentrale Mnfk M um $(0,0,0)$ enthält alle kritischen Punkte und Lösungskurven um $(0,0,c)$ innerhalb der invarianten Ebene μ_c für alle $c>0$.

Diese Kurven sind aber nicht C^∞ längs μ-Achse, da

Linearisierung

$\sigma(A_{(0,0,c)}) = \{c, 1\}$ und folglich ist die Glattheit von $\frac{1}{c}$ beschränkt

Satz 2.20 (Zentrale Mnfkn) Es sei f ein C^r-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $f(0)=0$ und $A:=Df(0)$. Es sei σ_s bzw. σ_c bzw. σ_u die Menge der Eigentwert von A, die negativen bzw. null bzw. positiven Realteil hat, d.h.

$$\operatorname{Re}\lambda \begin{cases} <0 & \text{für } \lambda\in\sigma_s \\ =0 & \text{"} \quad \lambda\in\sigma_c \\ >0 & \text{"} \quad \lambda\in\sigma_u . \end{cases}$$

Bezeichne E^s bzw. E^c bzw. E^u den (verallgemeinerten) Eigenraum von σ_s bzw. σ_c bzw. σ_u. Dann existeirten stabile C^r-Mnfk W^s (die tangential zu E^s um 0 ist), instabile C^r-Mnfk W^u (die tangential zu E^u um 0 ist) und eine zentrale C^{r-1}-Mnfk W^c (die tangential zu E^c um 0 ist). Die Mnfkn W^u, W^s und W^c sind alle invariant für den Fluss von f. Die stabile und instabile Mnfkn sind eindeutig, aber nicht unbedingt W^c.

(Falls f C^∞ ist, findet man eine zentrale C^r-Mnfk für jedes $r<\infty$.)