# Dynamische Systeme (Qualitative Theorie) WS 2011/2012

1. Vorbereitungen (Differentialmannigfaltigkeiten und Differentialtopologie)

2. Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten (lokale Eigenschaften)
   - Vektorfelde, kritische Punkte, topologischer Abbildungsgrad/Index,
   - Flüsse und Diffeomorphismus

3. Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten (globale Eigenschaften)
   - Strukturelle Stabilität
   - Bifurkationen
   - Chaotisches Verhalten

---

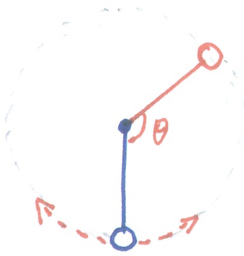
Vorlesung: Mo. 08:15-09:45
Geom H4

Übung: Mo. 10:15-11:00
Geom 241

# Kapitel 1. Vorbereitungen —

## Einführung in Differentialtopologie

In der Theorie der dynamischen Systeme studiert man Vorgänge, die sich mit der Zeit entwickeln. Mögliche Zustände der Systeme lassen sich häufig von Punkten einer differentiarbare Mannigfaltigkeit darstellen.

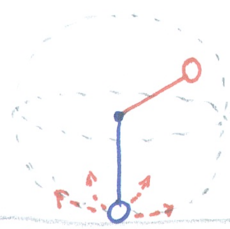



Pendel im Keis

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad \theta\in[0,2\pi),\ t\in\mathbb{R}$$

Konfigurationsraum: $S^1\times\mathbb{R}$, $S^1 := \{z\in\mathbb{C} : \|z\|=1\}$

(der Einheitskeis)



Pendel in der Sphäre $S^2$

Konfigurationsraum: $TS^2$ (nicht $S^2\times\mathbb{R}$)

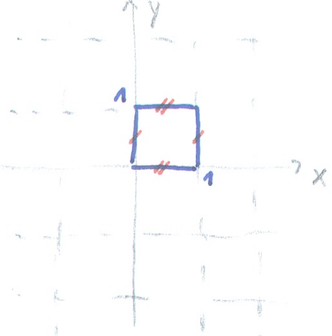
↑ der Tangentialraum von $S^2$.

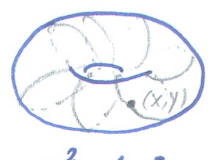
### Abschnitt 1.1. Topo. Mgf und Diff. Mngf.

Eine Mannigfaltigkeit, in Kürze, ist ein topo. Raum, der lokal homöom. zu einem euklidischen Raum aussieht. Beispiele sind Sphäre $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.
Obwohl ~~Differentialgleichungen~~ operationen in Zusammenhang mit Differentialgleichungen nur lokale geometrische Eigenschaften der eukl. Räume brauchen, ein dyn. System auf eine Mannigfaltigkeit kann sich viel ~~mehr~~ komplizierter verhalten als auf eukl. Raum. Betrachte

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \qquad (*)$$

- Ist $x, y, \alpha\in\mathbb{R}$, so ist $y=\alpha x+b$ die Lösung.
- Betrachte $(*)$ auf einem Torus, d.h. $x_1-x_2,\ y_1-y_2\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$
  als selben Punkt betrachten




$T^2 = S^1 \times S^1$

Man zeigt:

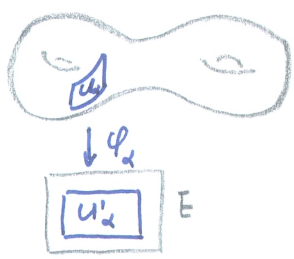
a) ist $\alpha$ rational, so ist jede Lösung abgeschlossen, d.h. $T^2$ ist von abgeschlossene Orbits ausgefüllt. (periodisch)

b) ist $\alpha$ irrational, so ist jede Lösung nicht abgeschlossen und dicht in $T^2$. (ergodisch)

---

**Def. 1.1.** Ein topo. Raum $S$ heißt eine topologische Mannigfaltigkeit, wenn $S$ eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ hat, s.d.

$\forall\, U_\alpha$, $\exists$ ein Homöom. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha$ wobei $U'_\alpha$ eine offene Menge im eukl. Raum $E$.

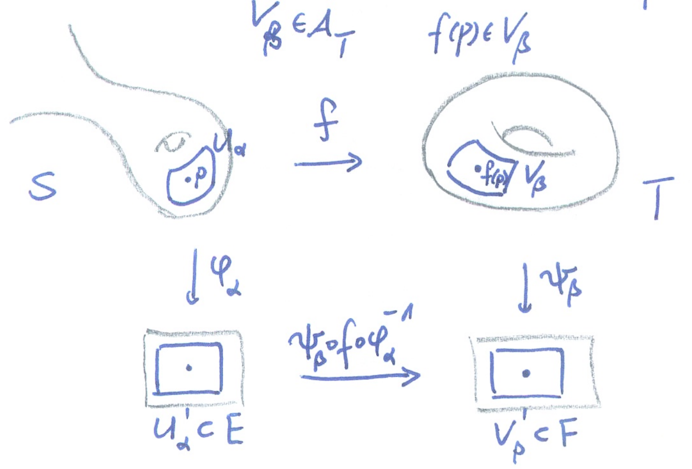



Jedes Paar ($U_\alpha$ Kartenumgebung, $\varphi_\alpha$ Kartenabbildung) heißt eine Karte. Die Kollektion $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ aller Karten heißt ein Atlas und $S$ ist als eine topo. Mnfk. genannt. ~~Für $p \in S$~~ $U_\alpha$, ~~ist $\varphi_\alpha(p)$~~

~~Seien $S, T$ Mnfk.s und $f : S \to T$ eine Abbildung.~~

**Def. 1.2** Seien $S$ bzw. $T$ eine Mnfk mit einem Atlas $A_S$ bzw. $A_T$. Eine Abbildung $f : S \to T$ heißt stetig, wenn

$\forall\, p \in S$ $\forall\, U_\alpha \in A_S$ mit $p \in U_\alpha$, $V_\beta \in A_T$ $f(p) \in V_\beta$: $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(f(U_\alpha))$ stetig ist.

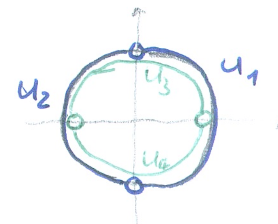



Die Abbd. $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ nennt man die lokale Darstellung von $f$.

**Beispiel 1.3** Jeder eukl. Raum ist eine. topo. Mnfk mit Atlas $A_E := \{(E, Id)\}$. Jede offene Menge $U$ einer Mnfk ist wieder eine Mnfk mit Atlas $A_U := \{(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})\}$.

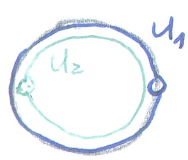
**Beispiel 1.4** $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ist eine Mnfk.

**Atlas I:** Seien
$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$$
$$U_2 = \{ \quad \text{''} \quad : x_1 < 0\}$$
$$U_3 = \{ \quad \text{''} \quad : x_2 > 0\}$$
$$U_4 = \{ \quad \text{''} \quad : x_2 < 0\}$$



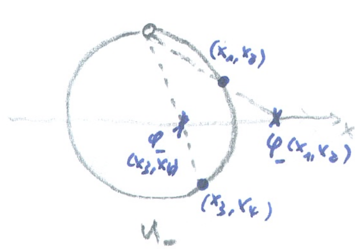

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2) = x_2$$
$$\varphi_3(x_1, x_2) = \varphi_4(x_1, x_2) = x_1$$

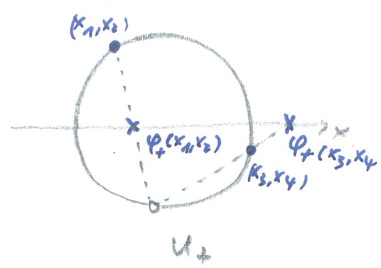
**Atlas II:** Seien $U_1 = S^1 - \{e^{i0}\}$, $\varphi_1 : U_1 \to (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$
$$e^{i\theta} \mapsto \theta \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi$$




$U_2 = S^1 - \{e^{i2\pi}\}$, $\varphi_2 : U_2 \to (\pi, 3\pi) \subset \mathbb{R}$
$$e^{i\eta} \mapsto \eta \quad , \quad \pi < \eta < 3\pi$$

**Atlas III:** Seien $U_- := S^1 - \{(0,1)\}$, $U_+ := S^1 - \{(0,-1)\}$
↖ Nordpol ↖ Südpol

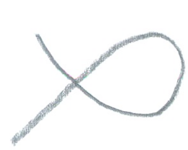



$$\varphi_-(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_2} \qquad \varphi_+(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 + x_2} \quad \text{— "stereografische Projektion"}$$

**Beispiel 1.5** $M \times N$ ist eine topo. Mngk, wenn $M, N$ Mnfk.n sind.
z.B. $T^2 = S^1 \times S^1$ ist eine Produktmngk.

**Beispiel 1.6**

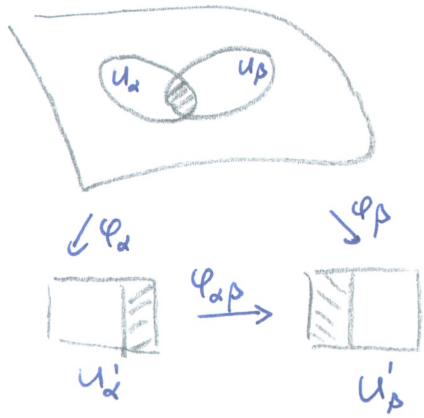


ist nicht eine Mnfk.

# Differenzierbarkeit der Mannigfaltigkeiten:

Seien $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ zwei Karten einer topo. Mnfk. $S$ mit

$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Dann ist der Kartenwechsel

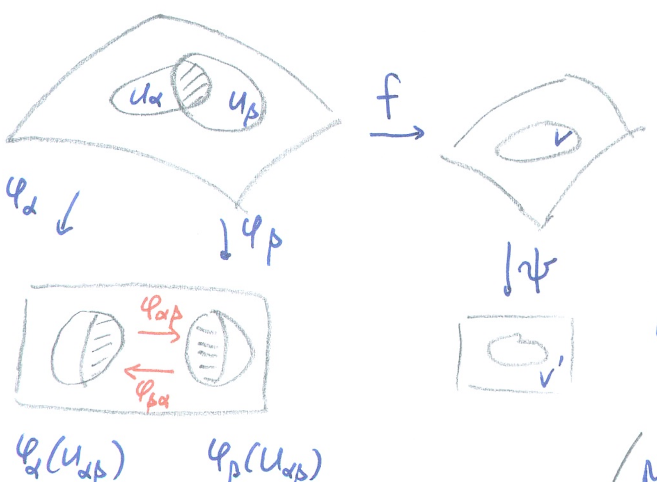



$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

ein Homöom. zwischen offene Mengen in eukl. Räumen.

Die Kartenwechseln zeigen wie Karten einer Mnfk "zusammmengeklebt" worden sind.

Wünscht man sich weitere Eigenschaften (als topo. Eigenschaften) auf Mannigfaltigkeiten, die sich durch Karten von eukl. Räumen übertragen lassen, soll man zusichern, dass dieser Prozess unabhängig von der Wahl der Karten ist. Zum Beispiel, seien $M, N$ Mnfkn, $f: M \to N$ stetig. Man definiere $f: M \to N$ differenzierbar, wenn ihre lokale Darstellung ist.




$$\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to V'$$

$$\psi \circ f \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to V'$$

Es kann sein, dass $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ diff. um $\varphi_\alpha(x)$,

aber $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ nicht diff. um $\varphi_\beta(x)$.

(Man merkt:

$$\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \underbrace{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}}_{\varphi_{\alpha\beta}}$$
)

Um dies zu vermeiden, ~~nötig~~ genügt es wenn die Kartenwechseln differenzierbar sind.

**Def. 1.7** Sei $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas einer topo. Mnfk $M$.

$A$ heißt einen $C^r$-Atlas $(1 \leq r \leq \infty)$, wenn jeder Kartenwechsel $C^r$ ist.

In diesem Fall, jede zwei Karten von $A$ heißen $C^r$-~~kompatibel~~ verträglich.

$A$ heißt gesättigt, wenn $A$ alle Karten enthält, die mit Karten von $A$ verträglich sind.

Einen gesättigten Atlas nennt man eine $C^r$-differenzierbare Struktur von $M$.

Eine Mannigfaltigkeit mit eine $C^r$-Struktur heißt eine $C^r$-differenzierbare Mnfk.

Eine $C^\infty$-Mnfk nennt man auch eine glatte Mnfk.

**Satz 1.8** (i) Sei $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein $C^r$-Atlas einer Mnfk $M$. Dann ist eine $C^r$-differenzierbare Struktur von $M$ eindeutig gegeben von

$$\mathcal{B} = \{(U, \varphi) : \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ und } \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ sind } C^r \text{ für alle } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A\}.$$

(ii) Seien $A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $A_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ zwei Atlasse von $M$ und jede Element von $A_1$ ~~ist~~ sei mit jeder Element von $A_2$ verträglich.

Dann sind die differenzierbare Strukturen gegeben von $A_1, A_2$ die gleiche.

**Bw.** (Hag)

Beispiele 1.3, 1.4, 1.5 sind alle $C^\infty$-Mnfkn. (Hag).

**Beispiel 1.9** ($\mathbb{RP}^n$) Betrachte die 2-Sphäre $S^2$ und definiere eine Äquivalenz $\sim$ auf $S^2$ durch: $x \sim y \Leftrightarrow y = -x$. Sei $\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim$ der Quotient, d.h. eine Element $p \in \mathbb{RP}^2$ ist eine Äquivalenzklasse $[x]$, wobei

$$p = [x] = [(x_1, x_2, x_3)] = [(-x_1, -x_2, -x_3)], \text{ für } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Man sieht durch $\sim$ sind $U_k^+ = \{x \in S^2 : x_k > 0\}$ mit $U_k^- = \{x \in S^2 : x_k < 0\}$ identifiziert, für $k = 1, 2, 3$. Nehme $U_1^+, U_2^+, U_3^+$ als eine Überdeckung für $\mathbb{RP}^2$.

Definiere $\varphi_1^+ : U_1^+ \to \varphi_1^+(U_1^+) = \{(x_2,x_3) : x_2^2+x_3^2<1\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_2,x_3)$

$\varphi_2^+ : U_2^+ \to \varphi_2^+(U_2^+) = \{(x_1,x_3) : x_1^2+x_3^2<1\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1,x_3)$

$\varphi_3^+ : U_3^+ \to \varphi_3^+(U_3^+) = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2<1\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1,x_2)$

Dann ist $\mathcal{A} = \{(U_1^+,\varphi_1^+),(U_2^+,\varphi_2^+),(U_3^+,\varphi_3^+)\}$ ~~ist~~ ein Atlas für $\mathbb{R}P^2$.

Man zeigt $\mathbb{R}P^2$ ist eine $C^\infty$-Mnfk mit $\mathcal{A}$. (Hag).

---

## Teilmannigfaltigkeiten und Mnfkn mit Rändern

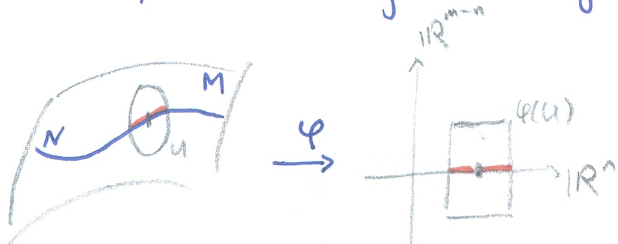
Ein erweiterter Begriff von linearen Teilräumen ist Teilmnfk:

**Def. 1.10** $M$ sei eine $C^r$-Mnfk, $N \subset M$ sei eine Teilmenge.

$N$ heißt eine $n$-dimensionale $C^r$-Teilmannigfaltigkeit von $M$, wenn

$\forall_{x\in N} \; \exists_{\substack{(U,\varphi) \text{ Karte} \\ x\in U,\ \varphi: U\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m}}$ sd. $\varphi(N\cap U) = \varphi(U)\cap\mathbb{R}^n$, wobei $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m : x_{n+1}=\dots=x_m=0\}$.

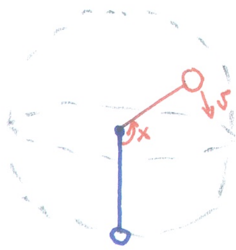
In Kürze, aus lokal gesehen liegt $N$ in $M$ wie $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ liegt.




Dann ist $\{(N\cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{N\cap U_\alpha})\}$ ein $C^r$-Atlas für $N$.

**Beispiel 1.11** $S^1$ ist eine Teilmnfk von $\mathbb{R}^2$. (Hag)

**Beispiel 1.12** Betrachte die Bewegung eines sphärischen Pendels.




$x \in S^2$ — die Auslenkung

$v \in \mathbb{R}^3$ — die Geschwindikeit

$x \perp v$ ~~wegen~~

D.h. die gesamt Dynamik find in

$$T = \{ (x,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 : x \perp v \}$$

statt, wobei $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$.

Es folgt, dass $T$ eine 4-dimensinale Teilmnfk von $\mathbb{R}^6$ ist.

**Bemerkung**: (H. Witney) Jede n-dim. Mnfk lässt sich als eine Teilmnfk von $\mathbb{R}^{2n}$ darstellen.

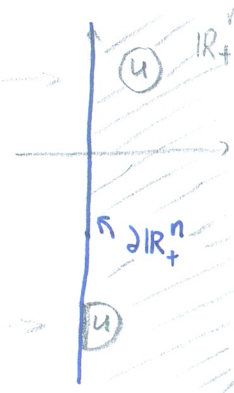
---

**Def. 1.13** Seien $M$ eine n-Mannigfaltigkeit und

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0 \}, \quad \mathbb{R}^n_- = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 0 \}.$$

$M$ heißt eine Mnfk mit Rand, wenn jeder Punkt von $M$ eine offene Kartenumgebung besitzt, die homöom. zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n_+$ (oder $\mathbb{R}^n_-$).

$\mathbb{R}^n_+$ (bzw. $\mathbb{R}^n_-$) hat zwei Typen der offenen Mengen $U$:




a) $U \cap \partial \mathbb{R}^n_+ = \emptyset$

b) $U \cap \partial \mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$

Sei $x \in M$. ~~Ist~~ Gibt es eine Kartenumgebung $U_\alpha$ um $x$ s.d. $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ eine offene Menge der Type a) ist, so heißt $x$ ein <u>innerer Punkt</u>.

~~Gibt es~~ Ist jede Kartenumgebung $U_\varphi$ um $x$ s.d. $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ offen in Sinn von b), so heißt $x$ ein <u>Randpunkt</u>.

## Orientation der Mfkn.

**Def. 1.14** Sei $M$ eine $C^r$-Mfk. $M$ heißt orientierbar, wenn es einen Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ von $M$ gibt, sodass jeder Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ Jacobi-Matrizen mit positiver Determinante hat. Sonst heißt $M$ nicht orientierbar.

**Beispiel 1.15** $S^n$ ist orientierbar (Hag).

**Beispiel 1.16** $\mathbb{RP}^n$ ist nicht orientierbar (Hag).

---

**Bemerkung** a) Nicht jede topo. Mfk erlaubt eine $C^r$-Struktur, $r \geq 1$.

b) Ist $M$ eine $C^1$-Mfk, so ist $M$ auch eine $C^r$-Mfk, für $1 < r \leq \infty$.