Die Funktion "deg" im Satz 2.1.1 nennen wir den Abbildungsgrad in $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.1.6 (Multiplikation) Seien $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ stetig und $y\notin g\circ f(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\deg(g\circ f,\Omega,y)=\sum_i \deg(f,\Omega,\Delta_i)\cdot\deg(g,\Delta_i,y), \qquad (*)$$

wobei Δ_i die beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ bezeichnet, für $i=1,2,\dots$

Bw. Da $\Delta_i\cap f(\partial\Omega)=\emptyset$ und Δ_i zusammenhängend ist, ist $\deg(f,\Omega,\Delta_i)$ wohldefiniert (vgl. Satz 2.1.1 (E3)). Da f stetig und $\bar{\Omega}$ kompakt ist, gibt es $r>0$ s.d. $f(\bar{\Omega})\subset B(0,r)$. Insbesondere ist

$$(g\circ f)^{-1}(y)\subset g^{-1}(y)\cap\overline{B(0,r)}=:M.$$

Da M kompakt und $\{\Delta_i\}_i$ eine disjunkte Überdeckung von $(g\circ f)^{-1}(y)$ ist, gibt es nur endlich viele i s.d.

$$\Delta_i\cap(g\circ f)^{-1}(y)\neq\emptyset.$$

Folglich gibt es endlich viele nichtnull Summanden in $(*)$.

Sei $M\subset\Delta_1\cup\Delta_2\cup\dots\cup\Delta_k$. Sind f,g C^1-Abb.n und ist y regulär, so gilt

$$\deg(g\circ f,\Omega,y)=\sum_{\underbrace{x\in(g\circ f)^{-1}(y)}_{\exists p \text{ s.d. } x\in f^{-1}(p),\ p\in g^{-1}(y)}}\underbrace{\operatorname{sign}\det D(g\circ f)(x)}_{=\operatorname{sign}\det Dg(f(x))\cdot\operatorname{sign}\det Df(x)}$$

$$=\sum_{\underbrace{p\in f(\Omega)\cap g^{-1}(y)}_{p\in\overline{B(0,r)}\cap g^{-1}(y)=M}}\operatorname{sign}\det Dg(p)\cdot\underbrace{\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}\det Df(x)}_{=\deg(f,\Omega,p)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{p\in g^{-1}(y)\cap\Delta_i}\operatorname{sign}\det Dg(p)\,\boxed{\deg(f,\Omega,p)}$$

$$=\sum_i\deg(f,\Omega,\Delta_i)\underbrace{\sum_{p\in g^{-1}(y)\cap\Delta_i}\operatorname{sign}\det Dg(p)}_{=\deg(g,\Delta_i,y)}.$$

Ansonsten wende das Argument von Approximationen an. ☐ 2.1.6.

2.1.2. Abbildungsgrad auf Mannigfaltigkeiten

Def 2.1.7 Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $x \in \mathbb{R}^n$.

Ist $\operatorname{sign}\det Df(x) = 1$, so sagen wir f ist orientierungserhaltend um x;

Ist $\operatorname{sign}\det Df(x) = -1$, so sagen wir f ist orientierungsumkehrend um x.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann hat M ein Atlas $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ für Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ und $\{U_i\}$ gibt eine Überdeckung von M. Weiter ist $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ ein C^∞-Atlas, d.h. für je zwei Karten $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ mit $U_i \cap U_j \neq \phi$ ist der Kartenwechsel

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\Big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus. Hat M ein C^∞-Atlas wessen Kartenwechsel für je zwei Karten mit nichleerem Schnitt orientierungserhaltend ist, so nennen wir M eine orientierte Mannigfaltigkeit.

Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Es sei M kompakt und ohne Rand, N sei zusammenhängend. Wir wollen Abbildungsgrad für stetige Abbildungen $f: M \to N$ definieren.

Def. 2.1.8 Seien M bzw. N eine Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ bzw. $\{(V_j, \psi_j)\}$. Eine stetige Abbildung $f: M \to N$ ist C^r-differenzierbar, falls $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\varphi_i(U_i)} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\psi_j(f(U_i))}$ C^r-differenzierbar ist, für $\forall i, j$.

Def. 2.1.9. Sei $f: M \to N$ C^1-differenzierbar und $y \in N$ ein <u>reg. Wert.</u>

Das heißt: ist $x \in f^{-1}(y)$ und (U_i, φ_i) eine Karte um x, (V_j, ψ_j) eine Karte um y, so ist $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i) \to \psi_j(f(U_i))$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus um $\varphi_i(x)$. Das bedeutet

$$D(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ist ein C^1-Isomorphismus. Wir nennen

$$\varepsilon_x := \operatorname{Sign} \det D(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))$$

<u>den lokalen Index</u> von x. Es seien $\{x_1, x_2, \dots x_k\} = f^{-1}(y)$. Definiere <u>den Abbildungsgrad von f</u> bezüglich y durch

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon_x \,.$$

<u>Bemerkung 2.1.10</u> Sind M, N orientiert, so ist der lokal index wohldefiniert, d.h. von Karten unabhängig. Sei (U_k, φ_k) bzw. (V_ℓ, ψ_ℓ) eine Karte um x bzw. y. Dann ist $U_k \cap U_i \neq \emptyset$, $V_\ell \cap V_j \neq \emptyset$ und folglich sind $\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}$ und $\psi_\ell \circ \psi_j^{-1}$ orientierungs-erhaltende Diffeomorphismen. Daher ist

$$D(\psi_\ell \circ f \circ \varphi_k^{-1})(\varphi_k(x)) = D\left(\underbrace{\psi_\ell \circ \psi_j^{-1}} \circ \underbrace{\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}} \circ \underbrace{\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}}\right)(\varphi_k(x))$$

$$= \underbrace{D(\psi_\ell \circ \psi_j^{-1})(\psi_j \circ f(x))}_{\det > 0} \cdot D(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \cdot \underbrace{D(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1})(\varphi_k(x))}_{\det > 0}$$

d.h. $\operatorname{Sign} \det D(\psi_\ell \circ f \circ \varphi_k^{-1})(\varphi_k(x)) = \operatorname{Sign} \det D(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))$ ∎

2.1.10