Bw 2.1.1 Existenz Sei $\deg_c$ die Funktion, die durch (*3) definiert ist. Wir zeigen, dass $\deg_c$ die Eigenschaften (E1)—(E4) erfüllt.

Hilfssatz 2.1.6 Sei $\deg_a$ die Funktion, die durch (*1) definiert ist. Erfüllt $\deg_a$ (E1)—(E4), so gilt (E1)-(E4) auch für $\deg_c$.

Bw. (E1) Sei $f: \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y \notin f(\partial\Omega)$. Ist $\deg_c(f, \Omega, y) \neq 0$, so gilt $\deg_a(g, \Omega, y_0) = \deg_c(f, \Omega, y) \neq 0$ für alle ausreichend nahe Approximationen $g \in C^1$ und regulären Wert $y_0 \in B_\delta(y)$ von g, wobei $\delta > 0$ ausreichend klein ist.

Da (E1) für $\deg_a$ gilt, ist $g^{-1}(y_0) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Angenommen, dass $f^{-1}(y) \cap \Omega = \emptyset$. Da $y \notin f(\partial\Omega)$ ist, ist $f^{-1}(y) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$

$\Rightarrow y \cap \underbrace{f(\bar{\Omega})}_{\text{kompakt}} = \emptyset \Rightarrow \varepsilon_0 := \sup\limits_{x \in \bar{\Omega}} |y - f(x)| > 0$. Sei $g_0 \in C^1$ eine Approximation von f mit $\sup\limits_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g_0(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Dann ist

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |y - g_0(x)| \geq \sup_{x \in \bar{\Omega}} |y - f(x)| - \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g_0(x)| > 0$$

Folglich ist $y \cap g_0(\bar{\Omega}) = \emptyset \Rightarrow g_0^{-1}(y) \cap \bar{\Omega} = \emptyset \overset{(E1)}{\Longrightarrow} \deg_a(g_0, \Omega, y_0) = 0$ ↯

(E2) Aufgabe

(E3) Sei $h: [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $y: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ $\forall t \in [0,1]$.

Ist $\tilde{h}: [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{y}: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ausreichende C^1-Approximation mit regulären Werten $\tilde{y}$ und $\tilde{y}(t) \notin \tilde{h}(t, \partial\Omega)$, so ist

$$\deg_c(h(t,\cdot), \Omega, y(t)) = \deg_a(\tilde{h}(t,\cdot), \Omega, \tilde{y}(t)) \equiv \text{konstant}. \quad \forall t \in [0,1].$$

(E4) $\deg_c(Id, \Omega, y) = \deg_a(Id, \Omega, y) = 1$ per Definition, für $y \in \Omega$.

☒ 2.1.6

Wegen Hilfssatz 2.1.6, genügt es (E1)–(E4) für $\deg_a$ nachzuprüfen.

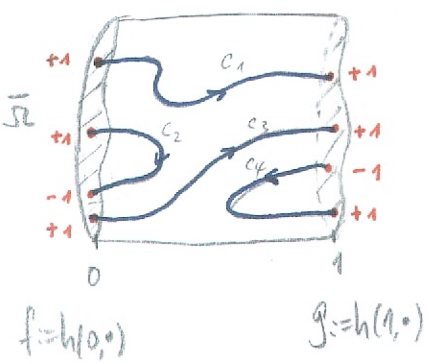
(E1) Da $\deg_a(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap\Omega} \operatorname{sign}\det Df(x) \neq 0$ ist, ist $f^{-1}(y)\cap\Omega \neq \emptyset$

⌈Ansonsten ist $\deg_a(f,\Omega,y) = 0$.⌋

(E2) $$\deg_a(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap\Omega} \operatorname{sign}\det Df(x)$$
$$= \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap\Omega_1} \operatorname{sign}\det Df(x) + \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap\Omega_2} \operatorname{sign}\det Df(x)$$
$$= \deg_a(f,\Omega_1,y) + \deg(f,\Omega_2,y).$$

(E3) Sei $h:[0,1]\times\bar\Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $y:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ stetig s.d. $y(t)$ ist ein regulärer Wert von $h(t,\cdot)$ und $y(t)\notin h(t,\partial\Omega)$ $\forall t$.

Dann ist $C := h^{-1}(y) \cap ([0,1]\times\bar\Omega)$ eine C^1-Kurve (Satz von impliziten Funkt.)



mit Enden: $\{0\}\times f^{-1}(y) \cup \{1\}\times g^{-1}(y)$. Genauer gesagt, ist $h^{-1}(y)\cap([0,1]\times\bar\Omega)$ eine kompakte C^1-Mannigfaltigkeit mit Rand $\{0\}\times f^{-1}(y) \cup \{1\}\times g^{-1}(y)$.

Sei $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ wie im Bild gezeigt.

Sei $x_1 := c_1(0) \in f^{-1}(y)$. Ist $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, so gibt

$b := \{c'(0), e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für $T_{(0,x)}M \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $M = [0,1]\times\bar\Omega$.

Man wähle Basen für $T_{(0,x)}M$, $x\in\bar\Omega$ s.d. b eine positive Basis ist (d.h. $\det b > 0$). Ist $c'(0) > 0$, so ist $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine positive Basis und

$\operatorname{sign}\det Df(x)_{\{c'(0),e_1,\dots e_n\}} = \operatorname{sign}\det Df(x)_{\{e_0,e_1,\dots,e_n\}}$. Ist $c'(0) < 0$, so ist

$\operatorname{sign}\det Df(x)_{\{c'(0),e_1,\dots e_n\}} = -\operatorname{sign}\det Df(x)_{\{e_0,e_1,\dots e_n\}}$.

Seien $\{u_1, \dots u_n\}, \{v_1, \dots v_n\}$ zwei Basen in $\mathbb{R}^n$. Gibt es eine $n \times n$ Matrix P mit $P\{u_1, \dots u_n\} = \{v_1, \dots v_n\}$ und $\det P > 0$, so sagen wir $\{u_1 \dots u_n\}$ ist <u>äquivalent</u> zu $\{v_1, \dots, v_n\}$ und bezeichnen wir

$$\{u_1, \dots, u_n\} \sim \{v_1 \dots v_n\}$$

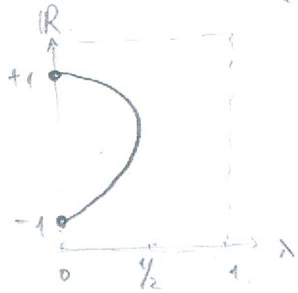
Man zeigt es gibt genau zwei Äquivalentklassen der Basen in $\mathbb{R}^n$. Aufgabe

Sei $\{e_1 \dots e_n\}$ die Standard-Basis in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen alle Basen, die äquivalent zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ sind, <u>positiv orientierte Basen</u>, und alle Basen, die nicht äquivalent zu $\{e_1 \dots e_n\}$ sind, <u>negativ orientierte Basen</u>.

<u>Überzeugung für (E3)</u>:

Betrachte $h : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(\lambda, x) := -x^2 + 1 - 2\lambda$. Sei $\Omega = (-2,2) \subset \mathbb{R}$. Dann ist

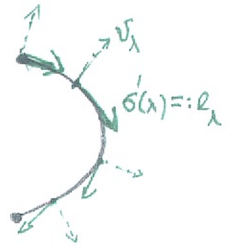
$$h^{-1}(0) \cap \left([0,1] \times \Omega\right) = \left\{ (\lambda, x) : x = \pm\sqrt{1-2\lambda},\ 0 \le \lambda \le \tfrac{1}{2} \right\} =: C$$



Wähle $(\lambda, x) \in C$ mit $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$. Dann ist $x = \sqrt{1-2\lambda}$.

Sei U eine Umgebung von λ s.d. $U \subset (0, \frac{1}{2})$ und

$$\sigma : U \to U \times \mathbb{R}$$
$$\lambda \mapsto (\lambda, \sqrt{1-2\lambda})$$



Dann lässt der Tangentialvektor auf C sich als

$$\sigma'(\lambda) = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}\right), \quad \lambda \in U$$

darstellen. Man prüft $Dh(\lambda,x) \cdot \sigma'(\lambda) = 0 \quad \forall_{\lambda \in U}$

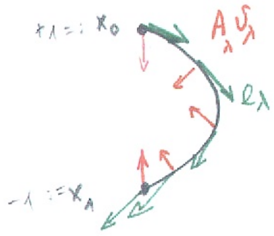
$$\Big[(-2, -2x) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \end{pmatrix} = -2 + \frac{2x}{\sqrt{1-2\lambda}} \overset{x=\sqrt{1-2\lambda}}{=\!=\!=} 0. \text{ oder } h(\lambda, x(\lambda)) \equiv 0 \ \forall_{\lambda \in U} \Rightarrow D_\lambda h(\dots) = 0. \Big]$$

Sei $v_\lambda \in \mathbb{R}^2$ s.d. $\{e_\lambda, v_\lambda\}$ eine pos. ori. Basis in $\mathbb{R}^2$ ist. Betrachte

$$D_{\lambda,x} h(\lambda,x) : \underset{\langle e_\lambda,\, v_\lambda \rangle}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{\langle v_\lambda \rangle}{\mathbb{R}}$$

Dann ist $D_{\lambda,x} h(\lambda,x) = (0, A_\lambda)$, $A_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nichtsingulär

Daher gibt $\{e_\lambda, A_\lambda v_\lambda\}$ auch eine Basis in $\mathbb{R}^2$ für $\lambda \in U$.



Da C zusammenhängig ist, sind alle $\{e_\lambda, A_\lambda v_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ nach dieser Konstruktion äquivalent. Insbesondere gilt

$$\{e_0, A_0 v_0\} \sim \{e_1, A_1 v_1\},$$

wobei $A_0 = D_x f(x_0)$, $A_1 = D_x f(x_1)$, und e_0, e_1 Gegenrichtungen haben. Daraus folgt

$$\operatorname{sign} \det D_x f(x_0) = - \operatorname{sign} \det D_x f(x_1).$$

Alternativ zeigt man $[0,1] \to \mathbb{Z}$, $t \mapsto \deg_a(h(t,\cdot), \Omega, y(t))$ ist stetig.

Sei $f := h(t_1,\cdot)$, $g := h(t_2,\cdot)$. Ist $|t_1 - t_2|$ klein, so ist $|f-g|$ klein.

Sei $y_1 := y(t_1)$, $y_2 := y(t_2)$. Da $y(t)$ regulärer Wert von $h(t)$ ist, ist y_1 (bzw y_2) ein regulärer Wert von f (bzw. g). Sei $\{x_1, \dots x_n\} = f^{-1}(y_1) \cap \Omega$ und $B_i := B_\delta(x_i)$ der δ-Ball um x_i, für $i = 1, \dots n$. Ist $\delta > 0$ klein, so sind die Bälle disjunkt. Man zeigt, dass g auch genau ein Urbild von y_2 in jedem B_i besitzt, für $|t_1 - t_2|$ ausreichend klein. Damit ist

$$\deg_a(f, \Omega, y_1) = \sum_{i=1}^n \deg_a(f, B_i, y_1) = \sum_{i=1}^n \deg_a(g, B_i, y_2) = \deg_a(g, \Omega, y_2).$$

(E4) $\quad \deg_a(\mathrm{Id}, \Omega, y) = 1$ per Definition für $y \in \Omega$.

$\exists$ Existenz

Eindeutigkeit Sei d eine andere Funktion, die (E1)-(E3) erfüllt. Wegen (E3) genügt es die Eindeutigkeit für C^1-Abb.n und reguläre Werte zu zeigen. Sei f eine C^1 Abb, y ein reg. Wert von f mit $y \notin f(\partial\Omega)$.

Sei $f^{-1}(y) \cap \Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ und B_i disjunkte kleine Kugeln um x_i, $i = 1, \dots n$.

Wegen (E2) ist es genug zu zeigen

$$\deg(f, B_i, y) = d(f, B_i, y). \quad \text{für } i \in \{1, \dots n\}$$

Sei $A := Df(x_i)$. Dann ist

$$f(x) = y + A(x - x_i) + o(|x - x_i|), \quad |x - x_i| \to 0.$$

Wegen (E3) ist $\begin{cases} d(f, B_i, y) = d(A, 0, B) \\ \deg(f, B_i, y) = \deg(A, 0, B) \end{cases}$, wobei B die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist.

Folglich ist es genug die Eindeutigkeit für lineare Abb.$_n$ zu zeigen.

Sei A eine $N \times N$ matrix mit $\det A \neq 0$. Seien $\lambda_1, \dots \lambda_m$ die negativen Eigenwerte von A und $\alpha_1 \dots \alpha_m$ ihre Vielfachheiten als Nullstellen von $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$. Setze $\alpha := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$

Dann ist (Aufgabe).

$$A \text{ homotop zu } \begin{cases} \mathrm{diag}[1, 1, \dots 1] & \text{für } \alpha \text{ gerade} \\ \mathrm{diag}[-1, 1, \dots 1] & \text{für } \alpha \text{ ungerade} \end{cases}$$

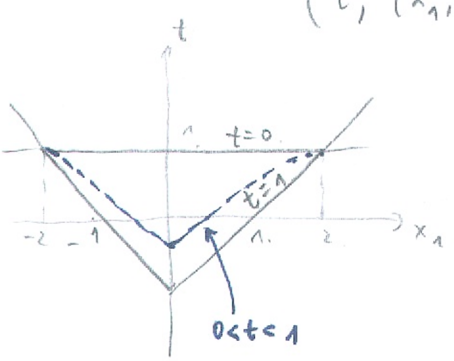
Sei $I_- := \mathrm{diag}[-1, 1, \dots 1]$. Wegen (E3)–(E4) reicht es die Eindeutigkeit für I_- zu zeigen.

Sei $\mathcal{O} := (-2,2) \times B_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ für B_{n-1} die Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n-1}$.

$\mathcal{O}_+ := (-2,0) \times B_{n-1}$, $\mathcal{O}_- := (0,2) \times B_{n-1}$

Definiere $h : [0,1] \times \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(t, (x_1, x_2 \dots x_n)^T) \longmapsto (t(|x_1| - 2) + 1, x_2, \dots x_n)^T$$



Man prüft $h(t, x_1, \dots, x_n) \neq 0$ für $(t, x_1 \dots x_n) \in \partial \mathcal{O}$. $\forall t \in [0,1]$.

Wegen (E3), haben wir denn

$$\underbrace{d(h(0,\cdot), \mathcal{O}, 0)}_{\substack{\| \; h^{-1}(0,\cdot)(0) = \emptyset \\ 0}} = d(h(1,\cdot), \mathcal{O}, 0)$$

$\Rightarrow$ $d(h(1,\cdot), \mathcal{O}_+, 0) + d(h(1,\cdot), \mathcal{O}_-, 0) = 0$. Sei $f := h(1,\cdot)$ Dann ist

$f^{-1}(0) \cap \mathcal{O}_+ = \{(1, 0, \dots 0)^T\}$, $f^{-1}(0) \cap \mathcal{O}_- = \{(-1, 0, \dots 0)^T\}$ und

$Df(1, 0, \dots 0)^T = \mathrm{Id}$, $Df(-1, 0, \dots 0)^T = I_-$.

Wegen (E3) ist dann $0 = d(\mathrm{Id}, B, 0) + d(I_-, B, 0) = 1 + d(I_-, B, 0) \Rightarrow d(I_-, B, 0) = -1$ $\boxtimes$

2.1.1