<u>Satz 1.3.33</u> (Denjoy wieder besucht) Ist $\tau \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, so gibt es ein nichttransitiver C^1-Diffeomorphismus $f: S^1 \to S^1$ mit $\tau(f) = \tau$.

<u>Bw</u>

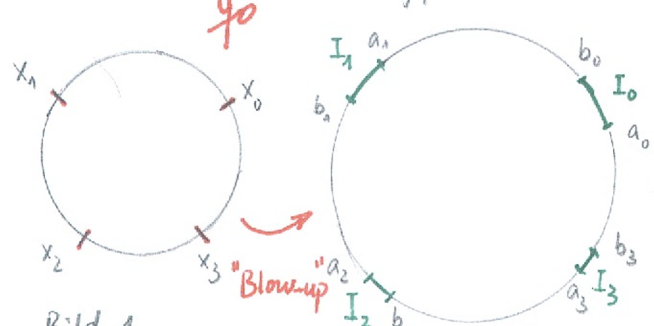


Bild 1. Bild 2.

$$|I_n| = \frac{1}{(n+3)^2}, \quad n = 0,1,2,3,$$

Sei R_τ die Rotation von τ, d.h. $R_\tau(x) = x\,e^{2\pi i \tau}$, $x \in S^1$.

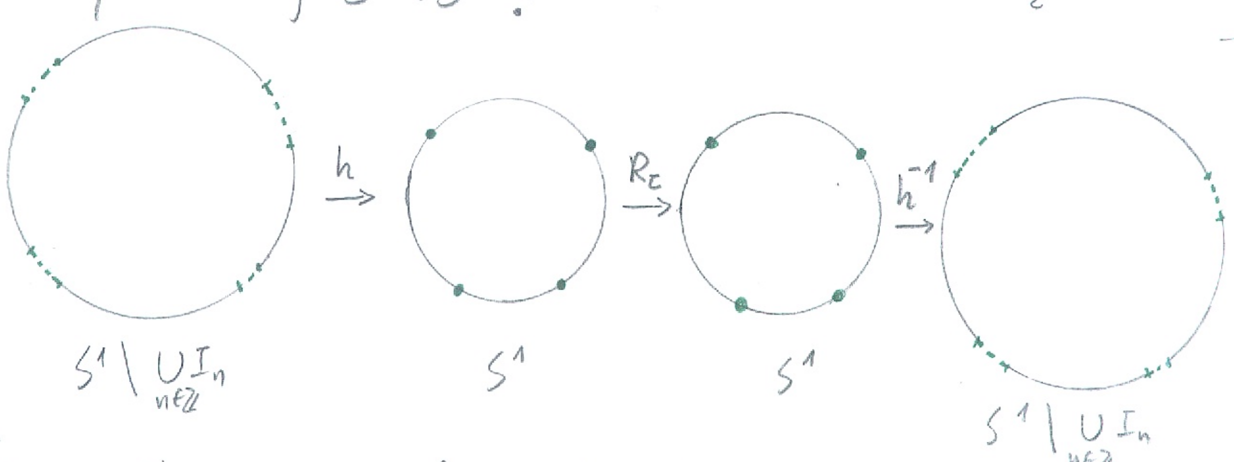
Sei $\{x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}\dots\} = \{R_\tau^n(x_0) : n = 0, \pm1, \pm2\dots\}$ ein Orbit von einem $x_0 \in S^1$,

und $S^1 = \left(S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\right)$ wie im Bild 2. konstruiert,

wobei $|I_n| := l_n = \frac{1}{(|n|+3)^2}$ für $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ [Man prüft $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n < 2\sum_{n=0}^{\infty} l_n = 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} < 2\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.]

Wir definieren $f: S^1 \to S^1$:

(i)



für $x \in S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ ist $f(x) := h^{-1}\circ R_\tau \circ h(x)$, wobei $h: S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \to S^1$ die Inverse des Blow-ups bezeichnet.

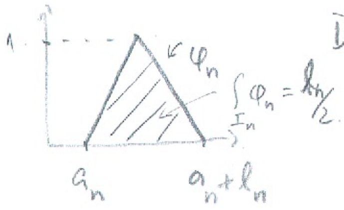
(ii) sodass, $f: I_n \to I_{n+1}$ bijektiv streng steigend für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definiere $f(a_n) := a_{n+1}$ und

$$f(x) = f(a_n) + \int_{a_n}^{x} g(s)\,ds \quad \text{für } x \in I_n,$$

wobei $\quad g(s) = 1 + c_n \varphi_n(s) \quad , \; s \in I_n \quad$ mit

$$c_n := 2\left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1\right) \quad \text{und} \quad \varphi_n(s) = 1 - \frac{|2(s-a_n) - l_n|}{l_n} \; , \; s \in I_n$$



Da $c_n \geq -1$ und $0 \leq \varphi_n(s) \leq 1 \;\; \forall_{s \in I_n}$ ist, ist

$$g(s) = 1 + c_n \varphi_n(s) \geq 1 - \varphi_n(s) \geq 0$$

und $g(s) = 0 \iff s = a_n + \frac{l_n}{2}$. Daher ist f streng steigend, da $f'(x) = g(x)$. Außerdem ist

$$f(b_n) = f(a_n) + \int_{a_n}^{b_n} g(s)\,ds = f(a_n) + \int_{I_n} 1 + c_n\varphi_n(s)\,ds = f(a_n) + l_n + c_n \frac{l_n}{2} = f(a_n) + l_{n+1}$$

$$= a_{n+1} + l_{n+1} = b_{n+1} \, ,$$

damit ist $f: I_n \to I_{n+1}$ auch bijektiv.

Sei $f: S^1 \to S^1$ durch (i)–(ii) definiert. Dann ist

$$f\Big(S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\Big) = S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \, , \quad f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \qquad (*)$$

und $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n \varphi_n(x) & x \in I_n \end{cases}$ erfüllt $f'(x) \geq 0$ und $f'(x) = 0$
$\Updownarrow$
$x = a_n + \frac{l_n}{2} \;\; \forall_{n\in\mathbb{Z}}$

Insbesondere ist $f'(x)$ nicht negativ mit diskreten Nullstellen.

Daraus folgt, dass f ein Homöomorphismus ist. Da $f'(x)$ auch stetig ist, ist f ein C^1-Diffeomorphismus.

Da $\underbrace{\Big|S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\Big|}_{= 1 - \sum l_n} > 0$ und $\underbrace{\Big|\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\Big|}_{= \sum l_n} > 0$ ist, ist f nicht transitiv wegen $(*)$.

Aufgabe: Geben Sie eine stetige monotone surj. Abb h $(h: S^1 \to S^1)$ explicit s.d. $h \circ f = R_c \circ h$ — 1.3.33 (vgl Satz 1.3.28)

Kapitel 2. Abbildungsgrad und Topologische Entropie

2.1 Abbildungsgrad

2.1.1 Abbildungsgrad in $\mathbb{R}^n$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ; $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Der Abbildungsgrad gibt eine Anzahl der Lösungen von

$$f(x) = y \quad , \quad x \in \Omega, \quad y \notin f(\partial\Omega),$$

Sodass diese Anzahl gegen kleine Störungen von f stabil ist.

Satz 2.1.1 Es gibt eine eindeutige Funktion

$$\deg : \{ (f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen beschr. } f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \text{ stetig} , y \notin f(\partial\Omega) \} \to \mathbb{Z},$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Existenz (E1) Ist $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, so ist $f^{-1}(y) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Additivität (E2) Ist $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ disjunkt mit $f^{-1}(y) \cap \Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, so ist

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$$

Homotopie-Invarianz (E3) Ist $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $y(t) \notin h(t, \partial\Omega) \; \forall t$, so ist $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) \equiv$ konstant.

Normalisierung (E4) $\deg(Id, \Omega, y) = 1$ für $y \in \Omega$.

Die Funktion "deg" nennt man den Abbildungsgrad von f in Ω.

Hilfssatz 2.1.2 Sei $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb. Ist y ein regulärer Wert von f, so ist die Menge $f^{-1}(y) \cap \bar{\Omega}$ endlich.

Bw. Da y ein regulärer Wert ist, ist $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für jedes $x \in f^{-1}(y)$ ein Isomorphismus. Wegen des Satzes von implizierter Funktion, ist f ein lokaler Homöomorphismus um jedes $x \in f^{-1}(y)$.
Angenommen, dass $f^{-1}(y) \cap \bar{\Omega}$ unendlich ist. Da $\bar{\Omega}$ eine kompakte Menge ist, gibt es eine Folge $\{x_n\} \subset f^{-1}(y) \cap \bar{\Omega}$ s.d. $x_n \to x_0 \in \bar{\Omega}$.
Aus der Stetigkeit von f, ist $x_0 \in f^{-1}(y)$. Aber x_0 besitzt keine Umgebung, in der f ein Homöomorphismus ist. $\lightning$

$\boxed{2.1.2.}$

Def. 2.1.3 Sei $f: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb und y ein regulärer Wert von f mit $y \notin f(\partial\Omega)$. Definiere

$$\deg_a(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Omega} \operatorname{sign} Df(x) \qquad (*1)$$

Hilfssatz 2.1.4 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: A \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine glatte Abb. $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in A$$

Bw. ausgelassen (vgl. K. Deimling, "Nonlinear functional analysis", S. 6)

Hilfssatz 2.1.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb. Dann ist die Menge der regulären Werte vom vollen Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist die Menge der regulären Werte von f dicht in $\mathbb{R}^n$.

Bw. ausgelassen. (vgl. Deimling "N.f.a", S. 8).

(I) Ist $f: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb. und y_0 kein regulärer Wert von f mit $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, so gibt es $\delta > 0$ s.d. $B_\delta(y_0) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Betrachte für $y' \in B_\delta(y_0)$

$$h: [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \qquad h(t,x) = f(x)$$

$$y: [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \qquad y(t) := t y_0 + (1-t) y'$$

dann ist h eine stetige Homotopie mit $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ $\forall_{t \in [0,1]}$.

Definiere

$$\deg_b(f, \Omega, y_0) := \deg_a(f, \Omega, y) \quad \text{für } \underset{\text{reg. Wert}}{y \in B_\delta(y_0)}, \ \delta > 0 \text{ klein.} \qquad (*2)$$

Aufgabe (*2) ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von y.

Mit (*1) (*2) haben wir den Abbildungsgrad für C^1-Abbn. definiert.

(II) Ist $f: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abb und $y \notin f(\partial\Omega)$, so ist

$$\alpha := d(y, f(\partial\Omega)) > 0$$

Abstand

$$d(A,B) := \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x - y\|$$

Wegen des Hilfssatzes 2.1.4, gibt es eine glatte Abb. $g: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ s.d. $|f(x) - g(x)| < \alpha$ $\forall_{x \in \bar{\Omega}}$. Dann ist $h: [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$h(x) := (1-t) f(x) + t g(x)$$

eine stetige Homotopie mit $y \notin h(t, \partial\Omega)$ $\forall_t$.

$\ulcorner$ $|h(t,x) - y| \geq |f(x) - y| - |f(x) - g(x)| > \alpha - \alpha = 0$. $\lrcorner$

Definiere

$$\deg_c(f, \Omega, y) := \deg_b(g, \Omega, y), \qquad (*3)$$

Aufgabe (*3) ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von g.