1.3.5 Monotonie der Rotationszahl

Man erinnert sich an der Definition der Rotationszahl:

$$\tau(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \quad , \quad F \text{ ist ein Lift von } f.$$

Es ist klar, dass $F_1 < F_2 \Rightarrow \tau(F_1) \leq \tau(F_2)$. Aber die Frage ist wie man zu einer entsprechenden Ordnung für Kreisabbildungen kommt. Dazu wollen wir zuerst eine Ordnung für Kreisabbildungen definieren.

Def. 1.3.37 Sei o.e.H die Menge der ori-erhaltenden Homöomorphismen des Einheitskreises in $\mathbb{C}$. Seien $f_0, f_1 \in$ o.e.H gegeben. Sind f_0, f_1 niemals antipodisch so definieren wir

$$h: [0,1] \times S^1 \to S^1 \quad h(t,x) := \frac{(1-t)f_0 + t f_1}{\| (1-t) f_0 + t f_1 \|} .$$

Sei H ein Lift von h. Wir nennen die Lifts $F_0 := H(0,\cdot)$, $F_1 := H(1,\cdot)$ kompatibel. Haben f_0, f_1 kompatibele Lifts F_0, F_1 mit $F_0(x) < F_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so sagen wir $f_0 \prec f_1$.

Def. 1.3.38 Seien $x, y \in S^1$. Haben x, y Lifte $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ sodass $\tilde{y} - \tilde{x} \in (0, \frac{1}{2}) \pmod 1$, so definieren wir $x \prec y$.

Seien $f_0, f_1 \in$ o.e.H. Ist $f_0(x) < f_1(x)$ für alle $x \in S^1$, so sagen wir $f_0 \prec f_1$.

Aufgabe Def 1.3.37 und Def. 1.3.38 führen zu der gleichen Definition von "$\prec$".

Aufgabe "$\prec$" ist eine Ordnungsrelation, die nicht transitiv ist

Satz 1.3.38 Die Rotationszahl ist monoton: ist $f_0 < f_1$, So ist $\tau(f_0) \leq \tau(f_1)$.

Bw Es ist unmittelbar klar per Definition.

Im Fall der irrationalen Werte ist die Rotationszahl steigend:

Satz 1.3.39 Ist $f_0 < f_1$ und $\tau(f_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\tau(f_0) < \tau(f_1)$.

Bw Seien F_0, F_1 kompatibele Lifte von f_0, f_1. Da f_0, f_1 niemals antipodisch sind, ist $F_1(x) - F_0(x) \neq \frac{1}{2} \pmod 1$. Da $f_0 < f_1$ ist, ist $F_1(x) - F_0(x) \in (0, \frac{1}{2}) \pmod 1$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit von $F_1 - F_0$ ist

$$F_1(x) - F_0(x) \in (0, \tfrac{1}{2}) \pmod 1 \quad \text{für alle } x.$$

O.B.d.A, wir nehmen an: $0 < F_1(x) - F_0(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Wegen der Stetigkeit und der Periodicität von $F_1 - F_0$ $\left(F_1 - F_0 = \underbrace{(F_1 - id)}_{per.} - \underbrace{(F_0 - id)}_{per} \right)$

ist $F_1(x) - F_0(x) > \delta$ für ein $\delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sei $p/q \in \mathbb{Q}$ sodass $\frac{p}{q} - \frac{\delta}{q} < \tau(F_0) < \frac{p}{q}$. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $F_0^q(x_0) - x_0 > p - \delta$.

⌈ Ansonsten wäre $\tau(F_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{F_0^{nq}(x) - x}{nq} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{n(p-\delta)}{nq} = \frac{p}{q} - \frac{\delta}{q}$ ↯ .⌋

Da $F_1^q(x_0) = F_1(F_1^{q-1}(x_0)) > F_0(F_1^{q-1}(x_0)) + \delta > F_0(F_0^{q-1}(x_0)) + \delta$
F_0 monoton

$= F_0^q(x_0) + \delta > x_0 + p$, ist entweder

$F_1^q(x) > x + p \quad \forall x$ oder $F_1^q(x_1) = x_1 + p$ für ein $x_1 \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\tau(F_1) \geq p/q$ $\qquad\qquad$ $\tau(F_1) = \frac{p}{q}$

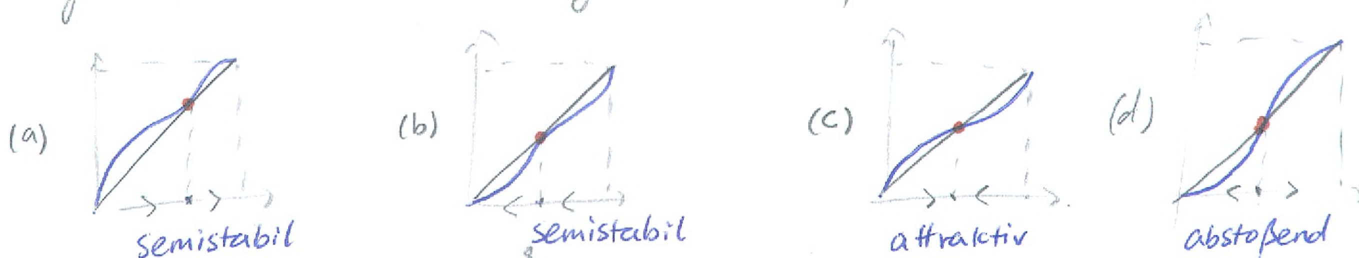
Damit ist $\tau(F_0) < p/q \leq \tau(F_1)$.

1.3.39 ☐

Satz 1.3.39 zeigt, dass eine irrationale Rotationszahl zu haben instabil ist. Der Fall der rationalen Rotationszahl ist jedoch unterschiedlich.

<u>Satz 1.3.40</u> Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöomorphismus mit $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ und nichtperiodischen Punkten. Dann gilt für alle hinreichend nahen Störungen f_1 mit entweder $f_1 < f$ oder mit $f < f_1$: $\tau(f_1) = \tau(f)$.

<u>Bw</u> Sei F ein Lift von f s.d. $\tau(F) = \tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. Dann entspricht jeder per. Punkt von f einem Schnittpunkt von $F^q - p$ und der Identität Id. Da f einen nichtper. Punkt hat, ist $F^q - p$ nicht identisch Id. Wir haben grundsätzlich drei Möglichkeiten für den Graph von $F^q - p$:



- Gibt es ein x mit $F^q(x) - p - x > 0$ (z.B (a), (c)), so hat jede hinreichend nahe Störung f_1 mit $f_1 < f$ (folglich $F_1^q - p < F^q - p$) einen per. Punkt y mit $F_1^q(y) - p - y = 0$ und folglich $\tau(f_1) = p/q$.
- Gibt es ein x mit $F^q(x) - p - x < 0$ (z.B. (b), (c)), so hat jede hinreichend nahe Störung f_1 mit $f < f_1$ einen per. Punkt y mit $F_1^q(y) - p - y = 0$ und daher $\tau(f_1) = p/q$.

Bemerkung 1.3.41

(i) Ist $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöom mit $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ s.d. f einen attraktiven oder einen abstoßenden per. Orbit hat, so ist $\tau(f_1) = \tau(f)$ für alle hinreichend nahen Störung f_1 von f.

(ii) Ist $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erh. Homöom. mit $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ s.d. f ausschließlich semistabilen per. Orbits hat, so gilt $\tau(f_1) = \tau(f)$ nur für Störungen f_1 auf einer Seite.

Satz 1.3.42 Ist jeder Punkt für $f: S^1 \to S^1$ periodisch, so ist die Rotationszahl um f streng steigend, d.h.

$$f_1 < f < f_2 \quad \Rightarrow \quad \tau(f_1) < \tau(f) < \tau(f_2).$$

Bw Aufgabe.

Satz 1.3.40 zeigt, dass die Rotationszahl nicht glatt von f abhängt. Um genauer die Nichtglattheit zu beschreiben, brauchen wir den folgenden Begriff:

Def. 1.3.43 Eine stetige monotone Funktion $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt Teufelsstiege, fall es eine Familie $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von disjunkten abgeschlossen Intervallen gibt, deren Vereinigung dicht in $[0,1]$ liegt, so dass φ auf jedem dieser Intervalle konstant ist.

<u>Satz 1.3.44</u> Es sei $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ eine monotone, stetige Familie ori-erhaltender Homöomorphismen auf S^1, sodass die Abbildung

$$\tau: \quad t \longmapsto \tau(f_t)$$

nicht konstant ist. Gibt es eine dichte Menge $S \subset \mathbb{Q}$, s.d. entweder

$$\tau(f_t) \notin S \quad \text{oder} \quad f_t \text{ hat einen nichtper. Punkt}$$

für alle f_t, $t\in[0,1]$, so ist τ einen Teufelsstiege.

<u>Bw</u> Wegen Satz 1.3.15, ist τ monoton und stetig. Sei $q \in S$.

Ist $f_t \in \tau^{-1}(q)$, so hat f_t einen nichtper Punkt (nach der Voraussetzung über S) und $\tau(f_t) \in S \subset \mathbb{Q}$. Wegen Satz 1.3.40 ist $\tau(f) = \tau(f_t) = q$ für hinreichend nahe f mit $f < f_t$ oder $f_t < f$. Folglich ist $I_q := \tau^{-1}(q)$ ein abgeschlossenes Intervall positiver Länge. Daher ist

$$\tau^{-1}(S) = \bigcup_{q\in S} I_q$$

eine disjunkte Vereinigung von abgesch. Intervallen. Es genügt zu zeigen $\tau^{-1}(S)$ ist dicht.

O.B.d.A nehmen wir an: ist $\tau(f_t) = p/q \in \mathbb{Q}\setminus S$, so hat f_t nur per. Punkte [Hat f_t einen nichtper. Punkt, so betrachten wir $S' = S \cup \{t\}$.]

Wegen Satz 1.3.42 und Satz 1.3.39, ist τ streng monoton in Punkten $t \in \tau^{-1}([0,1]\setminus S)$. Damit gilt für $t \in [0,1)\setminus \tau^{-1}(S)$ und $\varepsilon > 0$

$\tau(t) \neq \tau(t+\varepsilon)$. Da τ stetig und S dicht ist, gibt es ein

$$y \in [\tau(t), \tau(t+\varepsilon)] \cap S \quad \Rightarrow \quad \tau^{-1}(y) \in [t, t+\varepsilon] \cap \tau^{-1}(S).$$

Daher ist $\tau^{-1}(S)$ dicht in $[0,1]$. $\boxed{}$ 1.3.44