Satz 1.3.28 (Poincaré) Sei $f: S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl τ.
Dann gibt es eine stetige monotone Abbildung $h: S^1 \to S^1$ s.d.

$$h \circ f = R_\tau \circ h,$$

wobei $R_\tau: S^1 \to S^1$ die Rotation von τ bezeichnet. Weiter gilt:

(1) Ist f transitiv, so ist h ein Homöomorphismus;

(2) Ist f nicht transitiv, so ist h nicht invertierbar.

Def. 1.3.29 Ein dynamisches System (X, f) heißt transitiv, wenn es einen Orbit gibt, der in X dicht liegt.

Hilfssatz 1.3.30 Ist $\tau \notin \mathbb{Q}$, so ist jeder positiver Semiorbit von R_τ dicht in S^1.

Bw Aufgabe

Bw. 1.3.28 Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lift von f und $x \in \mathbb{R}$. Sei

$$B := \{ F^n(x) + m \}_{n, m \in \mathbb{Z}}$$

die insgesamten Lifte vom Orbit von $\pi(x)$. Definiere $H: B \to \mathbb{R}$ durch $H(F^n(x) + m) = n\tau + m$. Wegen Satz 1.3.24, ist H monoton.

Wegen Hilfssatz 1.3.30, ist $H(B)$ dicht in $\mathbb{R}$.

Sei $\tilde{R}_\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{R}_\tau(x) := x + \tau$. Dann ist $H \circ F = \tilde{R}_\tau \circ H$ auf B

$\ulcorner$ $H \circ F(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tau + m$

$\tilde{R}_\tau \circ H(F^n(x) + m) = \tilde{R}_\tau \circ (n\tau + m) = (n+1)\tau + m.$ $\lrcorner$

Hilfssatz 1.3.31 H hat eine stetige Erweiterung von B nach $\bar{B}$.

Bw Ist $y \in \bar{B}$, so gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

Definiere $H(y) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$. Man zeigt:

- Existenz des Grenzwertes.

  Ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} H(x_n) \neq \overline{\lim}_{n\to\infty} H(x_n)$, so erhält $\mathbb{R} \setminus H(B)$ ein nichtleeres Intervall, ein Widerspruch dagegen, dass $H(B)$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

- Unabhängigkeit von der Wahl der Folgen

  Da H monoton auf B ist, ist der Grenzwert unabhängig von der Wahl von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{}$ 1.3.3.1

Mit dem obigen Hilfssatz, ist H auf $\bar{B}$ definiert.

Man sieht, dass $H : \bar{B} \to \mathbb{R}$ monoton und surjektiv ist.

⌜ Sei $y \in \mathbb{R}$. Da $H(B) \subset \mathbb{R}$ dicht ist, gibt es $\{x_n\} \subset B$ mit $H(x_n) \to y$. Da H monoton ist, ist $\{x_n\}$ beschränkt $\Rightarrow \exists\, x \in \bar{B}$ s.d. $x_n \to x$. Wegen der Stetigkeit von H, ist $y = H(x) \in H(\bar{B})$. D.h. H ist surjektiv. ⌟

Daraus folgt die einzige Möglichkeit H auf $\mathbb{R}$ zu erweitern:

Ist $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{B}$, so definieren wir $H(x) = H(\alpha) = H(\beta)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Damit ist $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $H \circ F = \tilde{R}_c \circ H$ und für $z \in B$ gilt:

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = nc + m + 1 = H(z) + 1.$$

Dies gilt auch für $z \in \mathbb{R}$ unter der stetigen Erweiterung.

Daher ist die entsprechende Kreisabbildung $h : S^1 \to S^1$ wie gewünscht.

Außerdem sieht man H ist invertierbar $\Leftrightarrow$ H ist streng monoton

$\Leftrightarrow \bar{B} = \mathbb{R}$ für ein $x \in S^1$

$\Leftrightarrow O(x)$ ist ein dichter Orbit von f

$\Leftrightarrow f$ transitiv.

1.3.3 $\boxed{}$

Bemerkung 1.3.32

(a) In dem ersten Fall wenn h invertierbar ist, sagen wir f ist konjugiert zu R_c durch h; Im anderen Fall wenn h nicht invertierbar ist, nennen wir f einen Faktor von R_c durch h.

(b) Sei f ein ori-erhaltender Homöomorphismus mit rationaler Rotationszahl. Ist f konjugiert zu einer Rotation, so sind alle Orbits periodisch der gleichen Periode, d.h. $f^q = Id$ für ein $q \in \mathbb{N}$. Ist f ein Faktor von einer Rotation, so hat f unendliche vielen periodischen Orbits. Aufgabe

Wir geben ein Beispiel eines nichttransitiven Kreisdiffeomorphismus ohne periodische Punkte.

Def 1.3.36 →

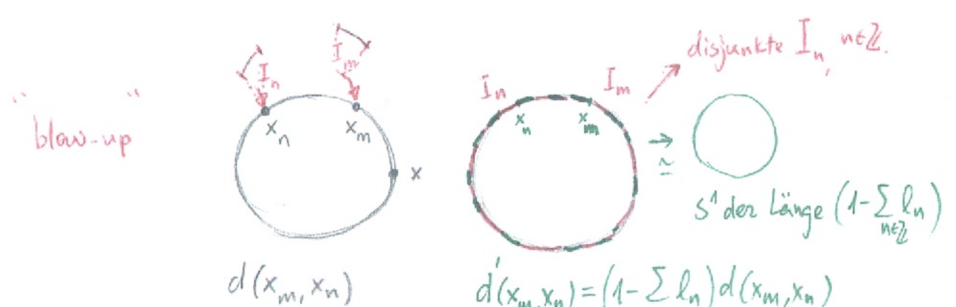
Satz 1.3.33 (Dejoy) Ist $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es ein nichttransitiver C^1 Diffeomorphismus $f: S^1 \to S^1$ mit $\tau(f) = \tau$.

Bw Seien $l_n := \dfrac{1}{(|n|+3)^2}$, $c_n := 2\left(\dfrac{l_{n+1}}{l_n} - 1\right) \geq -1$. Dann ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n < 2 \sum_{n=0}^{\infty} l_n = 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Sei $x \in S^1$ und $x_n := R_c^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. d.h. $O^+(x) = \{x, x_1, x_2, \dots\}$

Idee: die Punkte x_n durch Intervalle I_n der Länge l_n zu ersetzen.



$d(x_m, x_n)$

$d'(x_m, x_n) = (1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n) d(x_m, x_n)$

$$d(I_m, I_n) = (1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n) d(x_m, x_n) + \sum_{x_k \in (x_m, x_n)} l_k$$

Sei $h(a,l,x) := 1 - \frac{1}{l}|2(x-a)-l|$ für $x \in [a, a+l]$.

Dann ist $h(a,l,a+\frac{l}{2}) = 1$ und $\int_a^{a+l} h(a,l,x)\,dx = \frac{l}{2}$.

Sei a_n der linke Endpunkt von I_n und definiere

$$f'(x) := \begin{cases} 1 & x \in S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n h(a_n, l_n, x) & x \in I_n \end{cases}$$

Da $c_n = 2\left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1\right) = 2\,\frac{l_{n+1}-l_n}{l_n}$ ist, ist

$$\int_{I_n} f'(x)\,dx = \int_{I_n} (1 + c_n h(a_n, l_n, x))\,dx = l_n + \frac{l_n}{2} c_n = l_{n+1},$$

und folglich $f(I_n) = I_{n+1}$.

$\boxtimes$ 1.3.33

Umgekehrt zeigen wir, dass ein C^2-Diffeomorphismus $f: S^1 \to S^1$ mit irrationaler Rotationszahl τ immer transitiv und folglich konjugiert zur Rotation R_τ ist.

<u>Def. 1.3.34</u> Eine Abbildung $h: S^1 \to \mathbb{R}$ heißt von <u>beschränkter Schwankung</u>, wenn $\sup_P \sum_j |h(x_j) - h(x_{j+1})| < \infty$, wobei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ eine Partition von S^1 ist.

<u>Satz 1.3.35</u> Sei $f: S^1 \to S^1$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und Ableitung von beschränkter Schwankung. Dann ist f transitiv und demzufolge konjugiert zur Rotation R_τ.

<u>Def. 1.3.36</u> Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $f: M \to N$ eine Abbildung.

(a) f heißt <u>im Punkt $x \in M$ differenzierbar</u>, falls für jede Karte (U, φ) mit $x \in U$ und jede Karte (V, ψ) mit $f(x) \in V$

gilt:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(W) \text{ ist differenzierbar.}$$

(b) Für eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-a,a) \to M$ mit $\gamma(0) = x$ ist dann $\psi \circ f \circ \gamma : (-a,a) \to \psi(W)$ differenzierbar und die Abbildung

$$D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$$
$$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

heißt die Ableitung von f im Punkt x.

Γ.

Def 1.3.36' (c) Eine topologische Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist ein topologischer Raum, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- M ist ein Hausdorff-Raum.
- M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, d.h. M hat eine abzählbare Basis.
- M ist lokal euklidisch der Dimension n:

  $\forall p \in M$ $\exists$ eine Umgebung U von p und ein Homöom. $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

(U, φ) heißt eine Karte auf M. Ein topologischer Atlas ist $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ von Karten s.d. $S = \bigcup_i U_i$. Ein Atlas heißt C^k-Atlas, falls

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

für je zwei Karten mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Eine Mannigfaltigkeit mit einem C^∞-Atlas heißt eine glatte Mannigfaltigkeit.

(d) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : (-1,1) \to M$ zwei Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ und $\varphi \circ \gamma_1$, $\varphi \circ \gamma_2$ seien differenzierbar für eine Karte (U, φ) von p. Dann nennen wir γ_1, γ_2 äquivalent, wenn $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. Die Menge aller äquivalenten Klassen (Tangentialvektoren) ist der Tangentialraum und wird als $T_p M$ bezeichnet.

┘