Im Falle eines einzigen periodischen Orbits, folgt aus dem Satz 1.3.20, dass dieser semistabil ist, etwas verkürzt kann man formulieren: er stößt einseitig ab und ist einseitig attraktiv.

Aufgabe: Sei $f: S^1 \to S^1$ induziert von

$$x \xmapsto{F} x + \frac{1}{4}\sin^2 \pi x \pmod 1,$$

d.h. F ist ein Lift von f. Dann ist der einzige Orbit von f semistabil.

Nichtperiodische Punkte sind nicht nur individuel asymptotisch gegen periodischen Punkte, sondern auch folgerichtig für die iterierte Punkte. Das heißt, für einen nichtper. Punkt x bewegen sich alle Punkte $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{q-1}(x)$ nach vorne asymptotisch gegen $y, f(y), f^2(y), \dots, f^{q-1}(y)$ für einen per. Punkt y in der gleichen Richtung.

Hilfssatz 1.3.23 Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval wessen Endpunkte nebenstehende Nullstellen von $F^q - Id - p$, so hat $F^q - Id - p$ das gleiche Vorzeichen auf I und $F(I)$.

Bw Aufgabe

Bemerkung Aus Satz 1.3.12, 1.3.20, 1.3.23 folgt, dass für einen Kreishomöomorphismus mit einem per. Punkt, sind alle Orbits asymptotisch periodisch der gleichen Periode und in einer folgerichtigen Art.

1.3.4 Kreishomöomorphismus ohne periodischen Punkte

Ähnlich wie im Satz 1.3.18, zeigen wir, dass Orbits eines Kreishomöomorphismus ohne per. Punkte geordnet nach dennen von der entsprechenden Rotation.

Satz 1.3.24 Sei F ein Lift eines Ori-erhaltenden Homöom $f: S^1 \to S^1$ mit Rotationszahl $\tau := \tau(F) \notin \mathbb{Q}$. Dann gilt für $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

Bemerkung Die linke Ungleichung ist ein Sonderfall der rechten wenn F die Rotation von τ ist.

"$\Leftarrow$"

Bw Man sieht, dass $F^{n_1}(x) + m_1 \neq F^{n_2}(x) + m_2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ansonsten wäre $F^{n_1}(x) - F^{n_2}(x) \in \mathbb{Z}$ und dadurch x ein per. Punkt von f. ↯ $\tau \notin \mathbb{Q}$

Ist $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so wegen der Stetigkeit, gilt dies für alle $x \in \mathbb{R}$. Angenommen

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sei $y := F^{n_2}(x)$. Dann ist

$$F^{n_1 - n_2}(y) - y < m_2 - m_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ist $y = 0$, so ist $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$; Ist $y = F^{n_1-n_2}(0)$, so ist

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) < m_2 - m_1 + F^{n_1-n_2}(0) < 2(m_2 - m_1)$$

Induktiv erhält man $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$ und

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1-n_2)} < \lim_{n\to\infty} \frac{n(m_2-m_1)}{n(n_1-n_2)} = \frac{m_2-m_1}{n_1-n_2}.$$

Folglich ist $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$.

"$\Rightarrow$" Aufgabe

$\boxed{\text{B}}$ 1.3.24

<u>Satz 1.3.25</u> Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöom ohne per. Punkte. Ist $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq n$, $x \in S^1$ und $I \subset S^1$ ein abgeschlossenes Interval mit Endpunkten $f^m(x)$ und $f^n(x)$, so trifft jeder Semiorbit I.

<u>Bw</u> Da f keinen per. Punkte hat, ist $f^m(x) \neq f^n(x)$ $\forall m \neq n$ und folglich besteht I nicht aus einem einzigen Punkt. Sei $y \in S^1$ und betrachte den Semiorbit $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Es genügt zu zeigen, dass S^1 sich von Iterationen von I überdecken lässt, d.h.

$$S^1 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(I)$$

Sei $I_k := f^{-k(n-m)}(I)$. Man sieht, dass I_k und I_{k-1} einen gemeinsamen Endpunkt haben. Ist $S^1 \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(I)$, so ist $S^1 \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k(n-m)}(I)$ und folglich konvergierte die Folge der Endpunkte gegen ein $x \in S^1$. Aber dann ist

$$x = \lim_{k \to \infty} f^{-k(n-m)}(f^m(x)) = \lim_{k \to \infty} f^{(-k+1)(n-m)}(f^m(x))$$

$$= \lim_{k \to \infty} f^{(n-m)}(f^{-k(n-m)}(f^m(x))) = f^{(n-m)} \lim_{k \to \infty} (f^{-k(n-m)}(f^m(x)))$$

$$= f^{(n-m)}(x)$$

d.h. x ist ein periodischen Punkt von f $\lightning$.

$\boxtimes$ 1.3.25

Im Fall der Kreishomöomorphismus mit per. Punkten, ergeben sich die per. Punkt als Häufungspunkte aller Orbits. Im anderen Fall wird diese Rolle von ω-Grenzmenge gespielt.

Def. 1.3.26 Die <u>ω-Grenzmenge</u> von x ist

$$\omega(x) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{ f^i(x) : i \geq n \}},$$

also die Menge aller Häufungspunkte der positiven Semiorbits von x.

Bemerkung Wenn es per. Punkte gibt, sind alle ω-Grenzmengen periodische Orbits. Wenn es keine per. Punkte gibt, zeigen wir die ω-Grenzmengen sind gleich für alle x.

Satz 1.3.27 Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöom ohne per. Punkte. Dann ist $\omega(x)$ unabhängig von x und $E := \omega(x)$ ist entweder S^1 oder nirgends dicht und perfekt.

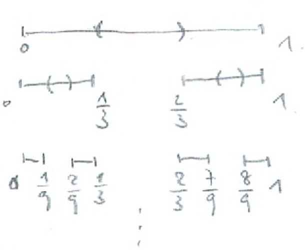
Def. 1.3.28 Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

(i) A heißt <u>nirgends dicht</u>, wenn das Innere von $\overline{A}$ leer ist.

(ii) A heißt <u>perfekt</u>, wenn A genau die Menge der Häufungspunkte von A ist.

Aufgabe 1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder nirgends dicht, nor perfekt.

2. Die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist nirgends dicht und perfekt.



Bemerkung Jede beschränkte, perfekte, nirgends dichte Menge in $\mathbb{R}$ ist homöomorph zu der Cantormenge.

Bw 1.3.27 <u>Unabhängigkeit von x</u> Seien $x, y \in S^1$. Wir zeigen $\omega(x) = \omega(y)$.

Sei $z \in \omega(x)$. Dann gibt es eine Folge $\{l_n\} \subset \mathbb{N}$ mit

$$f^{l_n}(x) \to z \quad , \quad n \to \infty$$

Da $y \in S^1$ ist, gibt es ein $k_m \in \mathbb{N}$ für jedes m mit

$$f^{k_m}(y) \in I_m := [f^{l_m}(x), f^{l_{m+1}}(x)] \qquad \text{(vgl. Satz 1.3.25)}.$$

Aber $f^{l_m}(x) \to z$ als $m \to \infty$. Daher ist $f^{k_m}(y) \to z$, $m \to \infty$.

Folglich ist $z \in \omega(y)$ und damit $\omega(x) \subset \omega(y)$. für alle $x, y \in S^1$

Insbesondere ist $\omega(y) \subset \omega(x)$ $\forall_{x,y \in S^1}$. Daraus folgt $\omega(x) = \omega(y)$

E ist entweder S^1 oder nirgends dicht und perfekt

Zuerst zeigen wir, dass $E := \omega(x)$ die kleinste abgeschlossene nichtleere f-invariante Menge in S^1 ist.

Ist $\emptyset \neq A \subset S^1$ abgeschlossen, f-invariant und $x \in A$ ist, so ist $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}} \underset{\text{f-inv.}}{\subset} A$ und $E = \omega(x) \subset \overline{\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}} \underset{\text{abgeschl.}}{\subset} A$. Daraus folgt, dass jede abgeschlossene invariante Menge A entweder $\emptyset$ ist oder erhält E. Wir zeigen, dass ∂E f-invariant ist.

Ist $x \in \partial E$ ist, so gilt für jede Umgebung U von x

$$U \cap E \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap E^c \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad f(U) \cap E \overset{E \text{ ist f-inv.}}{=} f(U) \cap f(E) \overset{f \text{ ist Homöom}}{=} f(U \cap E) \neq \emptyset$$

$$f(U) \cap E^c = f(U) \cap f(E^c) = f(U \cap E^c) \neq \emptyset$$

$$\overset{f \text{ Homöom}}{\Rightarrow} f(x) \in \partial E.$$

Das heißt ∂E ist eine abgeschlossene invariante Menge. Daher ist $\partial E = \emptyset$ oder $\partial E \supset E$. Da E abgeschlossen ist, ist $\partial E \subset E$. Daraus folgt $\partial E = \emptyset$ (d.h. $E = S^1$) oder $E = \partial E$ ($\Rightarrow$ E is nirgends dicht). Man zeigt, dass E perfekt ist. (Aufgabe)