Satz 1.3.15 Die Zuordnung $f \longmapsto \tau(f)$ ist stetig bezüglich der C^0-Topologie

Bw Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöom. und $\tau := \tau(f) \in \mathbb{R}$.

Seien $q_1 := \frac{r}{s}$, $q_2 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sodass $\frac{r}{s} < \tau < \frac{p}{q}$, wobei $ggT(r,s) = ggT(p,q) = 1$

Es genügt zu zeigen, ist g ein ori-erhaltender Homöom nahe f, so ist $\tau(g) \in \left(\frac{r}{s}, \frac{p}{q}\right)$.

Sei F ein Lift von f. Da $\tau < \frac{p}{q}$, ist $F^q(x) - x < p$ für ein $x \in \mathbb{R}$

$\ulcorner$ Ist $F^q(x) - x \geq p \ \forall x \in \mathbb{R}$, so ist $F^q(F^{iq}(x)) \geq F^{iq}(x) + p \ \forall_{i \in \mathbb{N}}$ und

$$\tau = \lim_{m \to \infty} \frac{F^{mq}(x) - x}{mq} = \lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{m-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x)}{mq} \geq \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$$

↯ $\lrcorner$

Andererseits ist $F^q(x) - x \neq p \ \forall_{x \in \mathbb{R}}$

$\ulcorner$ Ist $F^q(x) = x + p$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so ist $F^{mq}(x) = x + mp$ (Periodicität von $F^q - id$)

und folglich ist $\tau = \lim_{n \to \infty} \frac{F^{mq}(x) - x}{mq} = \frac{p}{q}$ ↯ $\lrcorner$

Wegen der Stetigkeit von $F^q - id$, gilt dann

$$F^q(x) - x < p \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

periodisch. stetig.

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $F^q - id$ folgt

$$F^q(x) - x < p - \delta \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \text{für ein } \delta > 0$$

Ist g nahe f, so hat g einen Lift G, der gleichmäßig hinreichend nahe F ist und

$$G^q(x) - x < p \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

erfüllt. Damit ist $\tau(g) < \frac{p}{q}$. Für die Abschätzung nach unten kann man mit dem gleichen Argument erhalten. $\boxed{\Xi}$

1.3.15

1.3.3 Kreishomöomorphismus mit periodischen Punkten

Wir wollen zeigen, dass periodische Punkte eines ori-erhaltenden Homöorphismus sich ähnlich wie die periodische Punkte der Kreisrotation mit der gleichen Rotationszahl verhalten.

Def. 1.3.16 Gegeben seien $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in S^1$ und $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in [x_0, x_0+1) \subset \mathbb{R}$ ihre Lifts. Die Ordnung von $(z_0, z_1, \dots z_{n-1})$ ist die Permutation σ der Menge $\{1, \dots, n-1\}$ s.d.

$$x_0 < x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \dots < x_{\sigma(n-1)}$$

Beispiel 1.3.17 Seien $p, q \in \mathbb{N}$ relativ prim. und

$$z_j := \pi\left(\frac{jp}{q}\right), \quad j = 0, 1, \dots, q-1$$

Ist $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < q$ und $kp \equiv 1 \pmod q$, so minimiert k den Bruchteil von $\frac{jp}{q}$ für $0 < j \leq q-1$. Damit ist $k = \sigma(1)$.

Aufgabe: Sei σ die Ordnung von $\{z_j : j = 0, 1, \dots, q-1\}$. Dann induktiv zeigt man, dass $\sigma(j) \equiv kj \pmod q$ für $0 \leq j \leq q-1$.

Satz 1.3.18 Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöomorphismus. Seien p, q relativ prim, sodass es $x \in S^1$ mit $f^q(x) = x$ gibt. Dann ist die Ordnung von $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ durch

$$\sigma(i) \equiv ki \pmod q \quad \text{mit} \quad kp \equiv 1 \pmod q$$

gegben.

Bemerkung Die Ordnung ist von f und x unabhängig.

<u>Bw</u>. Sei $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ fest gewählt. Wähle einen Lift F von f s.d. $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$ (vgl. Hilfssatz 1.3.13). Setze

$$A := \pi^{-1}\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$$

Dann liefert A $pq+1$ Punkte in $[\tilde{x}, \tilde{x}+p]$ und damit pq Intervalle (Aufgabe). Betrachte

$$I_0 = [\tilde{x}, F(\tilde{x})],\ I_1 = [F(\tilde{x}), F^2(\tilde{x})],\ \dots,\ I_{q-1} = [F^{q-1}(\tilde{x}), F^q(\tilde{x})].$$

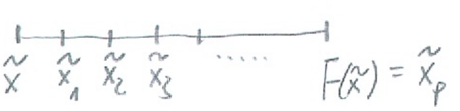
Dann ist F ein Bijektion von I_i nach I_{i+1} für $0 \le i < q-1$ und F bildet die Menge A in sich ab. (Aufgabe).

Daher müssen in jedem I_i je $p+1$ Punkte aus A liegen.

Sei $\tilde{x}_1$ der nächste rechte Nachbarn von $\tilde{x}$ in A. Dann können wir $\tilde{x}_1 = F^k(\tilde{x}) - r$ für $k, r \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < q$ schreiben.

Da $F^k - r$ monoton auf $\mathbb{R}$ ist und A in sich abbildet, und da $[\tilde{x}, F(\tilde{x})]$ $p+1$ Punkte von A erhält, ist

$$F^k(\tilde{x}_1) - r = \tilde{x}_2,\ F^k(\tilde{x}_2) - r = \tilde{x}_3, \dots, F^k(\tilde{x}_{p-1}) = \tilde{x}_p = F(\tilde{x})$$



Aus $F^k(\tilde{x}_{p-1}) = F(\tilde{x})$ folgt

$$f^{kp}(x) = f(x)$$

Damit ist k genau die einzige ganze Zahl von $[0, q-1]$ mit $kp \equiv 1 \pmod q$. Daher ist $k = \sigma(1)$ und wegen Beispiel 1.3.17 ist $\sigma(i) = ki \pmod q$, für $1 \le i \le q-1$.

$\boxed{3}$ 1.3.18.

Nächst zeigen wir, dass für alle Kreishomöomorphismus mit rationaler Rotationszahl alle nicht periodischen Orbits asymptotisch gegen periodische Orbits sind.

<u>Def. 1.3.19</u> Sei X ein topologischer Raum und $f: X \to X$ invertierbar. Ist $x \in X$ sodass $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = a$ und $\lim_{n\to\infty} f^{n}(x) = b$, so nennen wir x <u>heteroklin</u> zu den Punkten $a, b \in X$. Ist $a = b$, so heißt x ein <u>homokliner</u> Punkt zum Punkt a.

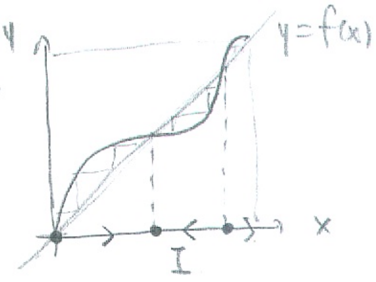
<u>Satz 1.3.20</u> Sei $f: S^1 \to S^1$ ein ori-erhaltender Homöomorphismus mit rationaler Rotationzahl $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten für Typen von nichtperiodischen Punkten.

(1) Hat f genau einen periodischen Orbit, so ist jeder nichper Punkt heteroklin zu zwei Punkten auf dem periodischen Orbit.

Ist die Periode größer als 1, so sind die beiden Punkte verschieden.

(2) Gibt es mehr als einen periodischen Orbit, so ist jeder nichtperiodischen Punkt zu zwei Punkten auf verschiedenen periodischen Orbits heteroklin.

<u>Hilfssatz 1.3.21</u> Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Interval. Ist $f: I \to I$ eine nichtfallende stetige Abbildung, so ist jedes $x \in I$ entweder ein Fixpunkt oder asymptotisch zu einem Fixpunkt von f. Ist f steigend (und daher invertierbar), so ist jedes $x \in I$ entweder ein Fixpunkt oder heteroklin zu nebenstehenden Fixpunkten.



<u>Bw</u>. Wie das Bild zeigt, ist die Richtung der Bewegung durch das Vorzeichen von $f - id$ entschieden. Ist $f(x)-x<0$, so bewegt es sich nach links; Ist $f(x)-x>0$, so nach rechts.

Sei $I=[a,b]$ und betrachte die stetige Abbildung

$$f - id : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)-x =: g(x)$$

Da $f(I)\subset I$, ist $f(a)\geq a$ und $f(b)\leq b$. Folglich ist $g(a)\geq 0$ und $g(b)\leq 0$. Aus dem Zwischenwertssatz folgt die Existenz eines $x\in I$ mit $g(x)=0$, d.h. $f(x)=x$.

Da g stetig ist, ist die Menge der Fixpunkte $Fix(f):=\{x\in I: f(x)=x\}$ abgeschlossen. Ist $Fix(f)=I$, so ist jeder Punkt von I ein Fixpunkt von f. Ansonsten ist $I\setminus Fix(f)$ eine nichleere offene Menge und sie lässt sich als eine Vereinigung disjunkter offenen Intervalle. Sei $(\alpha,\beta)\subset I\setminus Fix(f)$. Dann sind α,β entweder in $Fix(f)$ oder Endpunkte von I. Jedenfalls gilt $f(\alpha)\geq\alpha$ und $f(\beta)\leq\beta$. Ist $y\in[\alpha,\beta]$, so ist

$$\alpha\leq f(\alpha)\leq f(y)\leq f(\beta)\leq\beta.$$

Daher ist $f([\alpha,\beta])\subset[\alpha,\beta]$.

<u>Bemerkung 1.3.22</u> Ist $I=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ ein abgeschlossens beschränktes Interval und $f: I\to I$ eine nicht-fallende stetige Abbildung ohne Fixpunkte von (α,β), so ist ein Endpunkt γ von I ein Fixpunkt und alle Orbits außer des anderen Endpunkts (wenn der auch ein Fixpunkt ist) konvergieren gegen γ.

Ist f invertierbar, so sind die beide Endpunkte Fixpunkte und alle Orbits von (α, β) sind heteroklin zu α und β.

$\boxed{\Xi}$ 1.3.22

1.3.21

Bw 1.3.20 Da $\tau(f) = \frac{p}{q}$ ist, so hat f einen periodischen Orbit und jeder periodischen Orbit hat die gleichen Periode q. Weiter sind periodische Orbits von f Lifts der Fixpunkte von $F^q - p \in [x, x+1]$

Aus dem Hilfssatz 1.3.21 angewendet für $F^q - p$ auf $[x, x+1]$ folgt (1) und der erste Teil von (2).

Angenommen, dass $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ s.d. a und b nebenstehende Nullstellen von $F^q - p - id$, wobei a und b auf den gleichen Orbit projektiert sind. Dann hat f nur einen periodischen Orbit.

⌜ Sei $\pi(a) := x \in S^1$, $\pi(b) := f^k(x) \in S^1$ für ein $k < q$.

Dann gibt $\bigcup_{n=0}^{q-1} f^{nk}(\pi(a,b))$ eine Überdeckung von

$S^1 \setminus \{f^n(x)\}_{n=0}^{q-1}$ und erhält keine periodischen Orbits.

Daher erhält $f^{nk}(\pi(a,b))$ auch keine periodischen Orbits. ⌟

$\boxed{\Xi}$ 1.3.20