1.3. Abbildungen der Kreislinie als Dynamische Systeme

1.3.1 Abbildungsgrad und Periodische Punkte

Def 1.3.1 Sei X ein topologischer Raum und $f: X \to X$ eine stetige Abbildung. Die Anzahl der periodischen Punkte von f werde mit $P_n(f) := |\{x \in X : f^n(x) = x\}|$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet.

Der Abbildungsgrad gibt eine untere Schranke von $P_n(f)$ für Kreisabbildungen f.

Satz 1.3.2 Sei $f: S^1 \to S^1$ stetig. Dann gilt

$$P_n(f) \geq |\deg(f)^n - 1|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bw Sei $\deg(f) = k$ und F ein Lift von f.

Da F^n ein Lift von f^n ist, gilt

$$f^n(z) = z \underset{z = e^{2\pi i x}}{\Leftrightarrow} F^n(x) - x \in \mathbb{Z}$$

Da $\deg(f^n) = \deg(f)^n = k^n$ ist, hat man

$$F^n(1) - F^n(0) = k^n$$

Sei $G(x) := F^n(x) - x$. Dann ist $G(1) - G(0) = F^n(1) - 1 - F^n(0) + 0 = k^n - 1$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $G(x)$ mindestens $|k^n - 1| = |\deg(f)^n - 1|$ ganzzahlige Werte annimmt.

$\boxed{\Sigma}$ 1.3.2.

Aufgabe 1.3.3 Geben Sie ein Beispiel für f, wobei $P_n(f) = \deg(f)^n - 1$ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 1.3.4 Geben Sie ein Beispiel für f, wobei $P_n(f) = 2^n$, $\deg(f) = 0$ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$

Hinweis: Sei $F_0 : [0,1] \to [0,1]$, $F_0(x) := 4x(1-x)$ und $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ deren 1-periodische Fortsetzung. Sei $f: S^1 \to S^1$, sodass F ein Lift von f ist.

1.3.2 Rotationszahlen

Hilfssatz 1.3.5 Ist $f: S^1 \to S^1$ ein Homöomorphismus, so ist $|\deg(f)| = 1$.

Bw $f \circ f^{-1} = id \Rightarrow 1 = \deg(f \circ f^{-1}) = \underbrace{\deg(f)}_{\in \mathbb{Z}} \circ \underbrace{\deg(f^{-1})}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow \deg(f) = \pm 1$

$\boxed{}$ 1.3.5

Def 1.3.6 Sei $f: S^1 \to S^1$ ein Homöomorphismus.

f heißt orientierungserhaltend, wenn $\deg(f) = 1$.

Im Allgemein heißt $f: S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung orientierungserhaltend, wenn $\deg(f) > 0$.

Satz 1.3.7 Sei $f: S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus, $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lift von f. Dann existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ die Zahl: $\tau(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$. Dieser Grenzwert ist unabhängig von x, deswegen schreiben wir dafür auch $\tau(F)$. Dieser Wert ist weiterhin bis auf eine ganze Zahl wohldefiniert, d.h. sind F_1, F_2 Lifts von f, so ist

$$\tau(F_1) - \tau(F_2) = F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}.$$

f hat genau einen periodischen Punkt dann, wenn $\tau(F)$ rational ist!

Def 1.3.8 Die Zahl $\tau(f) := \underset{\in[0,1)}{[\tau(F)]}$ die Rest nennen wir die Rotationszahl von f

Hilfssatz 1.3.9 Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_{m+n} \leq a_n + a_{m+k} + L \ \forall m, n \in \mathbb{N}$ für ein k und L, so existiert $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Bw $a_{m+k} \leq a_m + a_{2k} + L \Rightarrow a_{m+n} \leq a_n + a_m + a_{2k} + 2L = a_n + a_m + L'$

Deswegen können wir oBdA setzen: $k = 0$.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ist $a < b < c$, $n \overset{①}{>} \frac{2L}{c-b}$ sodass $\frac{a_n}{n} \overset{②}{<} b$, so gilt für jedes

$$\ell \geq n \quad \text{mit} \quad \ell(c-b) \overset{③}{>} 2 \max_{r<n} a_r, \quad \ell = nk + r, \; r < n,$$

dass

$$\frac{a_\ell}{\ell} = \frac{a_{nk+r}}{\ell} \leq \frac{ka_n + a_r + kL}{\ell} \overset{\frac{k}{\ell} \leq \frac{1}{n}}{\leq} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{(②)<b} + \underbrace{\frac{a_r}{\ell}}_{(③)<\frac{c-b}{2}} + \underbrace{\frac{L}{n}}_{(①)<\frac{c-b}{2}} < c.$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq c \xrightarrow[a<c]{c \text{ beliebig}} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ existiert.}$$

☒ 1.3.9.

Hilfssatz 1.3.10 Ist f ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und F ein Lift von f, so gilt

$$F(y) - y \leq F(x) - x + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bw Sei $k := \lfloor y - x \rfloor$. Dann ist

$$F(y) - y = F(y) + F(x+k) - F(x+k) + (x+k) - (x+k) - y$$

$$= \underbrace{\left[F(x+k) - (x+k)\right]}_{(\deg(f)=1 \Rightarrow) = F(x)-x} + \underbrace{\left[F(y) - F(x+k)\right]}_{\leq 1} - \underbrace{\left[y - (x+k)\right]}_{0 \leq \ldots < 1}$$

$$\leq F(x) - x + 1.$$

☒ 1.3.10

Bw 1.3.7 **Existenz des Grenzwerts**

Sei $x \in \mathbb{R}$, $a_n := F^n(x) - x$. Dann ist

$$a_{m+n} = F^{m+n}(x) - x = F^m(F^n(x)) - F^n(x) + F^n(x) - x \overset{1.3.10}{\leq} a_m + 1 + a_n.$$

Wegen Hilfssatz 1.3.9, existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, aber möglicherweise $-\infty$.

Da $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(F^{i+1}(x) - F^i(x)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_i) - x_i\right) \geq \min_{0 \leq y \leq 1} F(y) - y$,

ist diese Möglichkeit ausgeschlossen, d.h. $\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R}$

Unabhängigkeit von x

f ist ein orientierungserhaltender Homöom. $\Rightarrow \deg(f)=1 \Rightarrow F(x+1)=F(x)+1$

Ist $|x-y|<1$, so ist $|F(y)-F(x)|<1$ und

$$\left|\left|\frac{F^n(x)-x}{n}\right|-\left|\frac{F^n(y)-y}{n}\right|\right| \leq \frac{|F^n(x)-F^n(y)|+|x-y|}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Folglich sind die Rotationszahlen von x und von y gleich, wenn eine davon als Grenzwert existiert.

Unabhängigkeit von F

Seien F_1, F_2 Lifts von f. Dann ist $F_2 = F_1 + m$, für ein $m \in \mathbb{Z}$ und

$$\tau(F_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_2^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_1^n(x)+mn-x}{n} = \tau(F_1)+m.$$

Periodische Punkte. Sei $z \in S^1$ ein periodischer Punkt von f und x ein Lift von z. $f^q(z)=z \Rightarrow F^q(x)=x+p$ für ein $p \in \mathbb{Z}$.

Ist $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\frac{F^{mq}(x)-x}{mq} = \frac{1}{mq}\sum_{i=0}^{m-1} F^q(F^{iq}(x))-F^{iq}(x) = \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}.$$

Daraus folgt $\tau(F) = \frac{p}{q}$.

Umgekehrt ist $\tau(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so aus

$$\tau(F^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^m)^n(x)-x}{n} = m \lim_{n\to\infty} \frac{F^{mn}(x)-x}{mn} = m\,\tau(F)$$

folgt $\tau(F^q)=p$. $\Rightarrow \tau(f)=0$

Hilfssatz 1.3.11 $\tau(f)=0 \Rightarrow f$ hat ein Fixpunkt.

Bw. Angenommen, dass f keine Fixpunkte hat.

Sei F ein Lift von f mit $F(0) \in [0,1)$.

Da $f(z)=z \underset{z=e^{2\pi i x}}{\iff} F(x)-x\in\mathbb{Z}$, ist $F(x)-x\notin\mathbb{Z}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Dann erfüllt die stetige Abbildung $G(x):=F(x)-x$ wegen $G(0)=F(0)-0\in(0,1)$

$$G(x)=F(x)-x\in(0,1) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Da G eine stetige und periodische Abbildung ist, hat G ein Maximum und ein Minimum, d.h. $\exists\,\delta>0$ s.d.

$$0<\delta\le F(x)-x\le 1-\delta<1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Daher aus $F^n(0)=F^n(0)-0=\sum_{i=0}^{n-1}\left(F^{i+1}(0)-F^i(0)\right)$ folgt

$$n\delta\le F^n(0)\le n(1-\delta)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\le\frac{F^n(0)}{n}\le 1-\delta \Rightarrow 1-\delta \ge \tau(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(0)}{n}\ge\delta>0 \quad \lightning \quad \tau(f)=0$$

$\boxed{}$ 1.3.11. & 1.3.7

<u>Satz 1.3.12</u> Ist $f:S^1\to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus, so haben alle periodischen Orbits die gleiche Periode.

<u>Bw.</u> Sei z ein periodischer Punkt von f mit $f^r(z)=z$, $r\in\mathbb{N}$

Sei F ein Lift von f mit $\tau(F)=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $\mathrm{ggT}(p,q)=1$

Dann ist $F^r(x)=x+s$, für ein $s\in\mathbb{Z}$ und

$$\frac{p}{q}=\tau(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^{nr}(x)-x}{nr}=\lim_{n\to\infty}\frac{ns}{nr}=\frac{s}{r}$$

$$\Rightarrow s=mp,\ r=mq \text{ für ein } m\in\mathbb{Z} \Rightarrow F^{mq}(x)=x+mp \quad \forall x$$

<u>Hilfssatz 1.3.13</u> $F^q(x)=x+p$

F monoton $\qquad$ F periodisch mit $F^q(x)>x+p$.

Ist $F^q(x)>x+p$, so ist $F^{2q}(x)=F^q(F^q(x))>F^q(\underbrace{x+p}_{x'})>\underbrace{x+p}_{x'}+p=x+2p$

$$\Rightarrow F^{mq}(x)>x+mp \quad \lightning$$

Das Argument gilt auch für den Fall $F^q(x)<x+p$.

Folglich ist $F^q(x)=x+p$.

$\boxed{}$ 1.3.13

$\boxed{}$ 1.3.12

Satz 1.3.14 Ist $h: S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus, dann gilt $\tau(h^{-1} \circ f \circ h) = \tau(f)$.

Bw Seien F bzw. H ein Lift von f bzw. h.

Dann ist $H^{-1} \circ F^n \circ H$ ein Lift von $h^{-1} \circ f^n \circ h$.

Sei H sodass $H(0) \in [0,1)$. Wir brauchen Abschätzung von

$$\left| H^{-1} \circ F^n \circ H(x) - F^n(x) \right| = \left| (H^{-1} F H)^n(x) - F^n(x) \right|$$

- Ist $x \in [0,1)$, so gilt $0 - 1 < H(x) - x < H(x) < H(1) < 2$

  Wegen der Periodicität, ist $|H(x) - x| < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  Ähnlich ist $|H^{-1}(x) - x| < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Ist $|y - x| < 2$, so gilt $|F^n(y) - F^n(x)| < 3$ wegen Hilfssatz 1.3.10

Folglich ist

$$\cancel{-3 \leq [y] - [x] - 1 = F^n([y]) - F^n([x]+1) < F^n(y) - F^n(x)}$$

$$\cancel{< F^n([y]+1) - F^n([x]) = [y] + 1 - [x] \leq 3}$$

Aus den obigen zwei Abschätzungen folgt

$$\left| (H^{-1} F H)^n(x) - F^n(x) \right| \leq \left| (H^{-1} F H)^n(x) - F^n H(x) \right| + \left| F^n H(x) - F^n(x) \right|$$

$$< 2 + 3,$$

$$\Rightarrow \frac{\left| (H^{-1} F H)^n(x) - F^n(x) \right|}{n} < \frac{5}{n} \Rightarrow \tau(H^{-1} F H) = \tau(F).$$

$\boxed{3}$ 1.3.14

Satz 1.3.15 Die Abbildung $f \mapsto \tau(f)$ ist stetig bezüglich der C^0-Topologie

Bw Sei f gegeben mit einem Lift F. Sei $\tau := \tau(F) \in \mathbb{R}$

Betrachte $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 < \tau < q_2$

Seien $q_1 = \frac{r}{s}$, $q_2 = \frac{p}{q}$.

$ggT(r,s) = 1 \quad ggT(p,q) = 1$

Wähle einen Lift F von f mit

$$F^q(x) - x - p \in (-1, 0) \quad \text{für ein } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $x+p-1 < F^q(x) < x+p \quad \forall x \in \mathbb{R}$ wegen der Periodicität.

Da die Abbildung $x \longmapsto F^q(x) - x$ periodisch und stetig ist, nimmt sie ein Maximum und ein Minimum an, Folglich

$$\exists \delta > 0 \text{ s.d.} \qquad x+p-1+\delta < F^q(x) < x+p-\delta$$

Daraus folgt, dass jede gleichmäßig hinreichend nahe von F liegende Abbildung G die Bedingung

$$x+p-1 < G^p(x) < x+p$$

erfüllt. Sei g ein Kreisabbildung nahe f, so gibt es einen Lift G von g nahe F. Damit ist

$$\frac{r}{s} \underset{\uparrow}{<} \tau(G) < \frac{p}{q}$$

mit dem gleichen Argument.

1.3.15