2.2. Topologische Entropie

Das Wort „Entropie" bedeutet Unordnung. In der Theorie dynamischer Systeme messen wir damit die Unvorhersagbarkeit von Orbits.

Def. 2.2.1 Sei X kompakter metrischer Raum, $f: X \to X$ stetig. Auf X definieren wir eine neue Metrik:

$$d_f^n(x,y) := \max_{0 \le i \le n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Man sieht $d_f^n(x,y)$ misst den maximalen Abstand zwischen f-Orbits von x und y bis zur Länge n. Offensichtliche Folgerungen sind:

- $d_f^n(x,y) \geq d(x,y)$
- $m > n$ impliziert $d_f^m(x,y) \geq d_f^n(x,y)$
- die offen Kugel um x mit Radius r bzgl. d_f^n ist

$$B_{d_f^n}(x;r) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} B(f^i x; r)$$

Def. 2.2.2 Seien $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge $F \subset X$ heißt eine <u>(n,ε)-Überdeckung</u> für X bzgl. f, falls $\forall_{x \in X} \exists_{y \in F}$ s.d. $d_f^n(x,y) < \varepsilon$, d.h.

$$X \subset \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} B(f^i x; r).$$

Die Kardinalität einer (n,ε)-Überdeckung der wenigsten Elemente bezeichnen wir mit $N_d(f,n,\varepsilon)$, d.h.

$$N_d(f,n,\varepsilon) = \min\{\#F : F \text{ ist eine } (n,\varepsilon)\text{-Überdeckung für } X\}.$$

Man sieht

- $N_d(f,n,\varepsilon) < \infty$ wegen der Kompaktheit von X
- $N_d(f,n,\varepsilon)$ ist für festes f, d, ε, monoton wachsend in n.

Wir interessieren uns dafür, wie schnell es wächst.

Def 2.2.3 Sei $h_d(f,\varepsilon)$ die exponentielle Wachstumsrate von $N_d(f,n,\varepsilon)$ in n,

d.h. $$h_d(f,\varepsilon) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_d(f,n,\varepsilon)}{n}.$$

Zuletzt definieren wir
$$h(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} h_d(f,\varepsilon).$$
$h(f)$ heißt die <u>topologische Entropie</u> von f.

Bemerkung 2.2.4 $h(f)$ ist als Grenzwert wohldefiniert, da $h_d(f,\varepsilon)$ monoton in ε ist. Genauer gilt ist $\varepsilon' < \varepsilon$, so ist $h_d(f,\varepsilon') \geq h_d(f,\varepsilon)$.

In der Definition von h wird die Metrik benutzt. Dennoch heißt h topologische Entropie und nicht metrische ~~Entropie~~. Denn wie folgender Satz uns mitteilt, hängt h wirklich nur von der Topologie ab.

Satz 2.2.5 Seien d' und d Metriken auf X, die die gleiche Topologie erzeugen.

Dann ist $$\lim_{\varepsilon\to 0} h_d(f,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_{d'}(f,\varepsilon).$$

Bw. Betrachte $D_\varepsilon := \{(x_1,x_2)\in X\times X : d(x_1,x_2)\geq\varepsilon\} \subset X\times X$, eine kompakte Menge in $X\times X$ ist. Da d und d' die gleiche Topologie erzeugen, ist
$$d' : X\times X \to \mathbb{R}$$
stetig und nimmt daher ihr Minimum auf D_ε an. ⌈Dieses Minimum, als δ bezeichnet, ist positiv. Ansonsten hätten wir $x_1 \neq x_2$ mit $d'(x_1,x_2)=0$ $\lightning$.⌋

Daher gilt
$$d'(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow d(x_1,x_2)<\varepsilon,$$
d.h. δ-Bälle für d' sind in ε-Bälle für d enthalten. Dieses Argument überträgt sich sofort auf d_f^n und $d_f'^n$. Daraus folgt
$$N_d(f,n,\varepsilon) \leq N_{d'}(f,n,\delta) \Rightarrow h_d(f,\varepsilon) \leq h_{d'}(f,\delta)$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} h_d(f,\varepsilon) \leq \lim_{\delta\to 0} h_{d'}(f,\delta).$$ Vertauschen der Rollen von d und d' beweist das Resultat. $\boxed{\text{z}}$

Satz 2.2.6 Seien X und Y kompakte metrische Räume, $f: X \to X$ und $g: Y \to Y$ seien stetig. Ist f topologisch konjugiert zu g, so haben f und g dieselbe topologische Entropie.

Bw. Da f topologisch konjugiert zu g ist, $\exists$ einen Homöomorphismus (bezüglich der Topologien $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ auf X, Y) $k: X \to Y$ s.d. $f = k^{-1} \circ g \circ k$.

Insbesondere ist

$$\mathcal{T}_Y = \{ U \subset Y : k^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \} \quad \text{und damit}$$

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(k^{-1}(y_1), k^{-1}(y_2)).$$

Ist $F \subset X$ eine (n,ε)-Überdeckung für X, so ist $k(F) \subset Y$ eine (n,ε')-Überdeckung für Y, wobei $\varepsilon' > 0$ ist s.d. $d_X(x_1,x_2) < \varepsilon \Rightarrow d_Y(k(x_1), k(x_2)) < \varepsilon'$.
Daraus folgt $N_{d_Y}(g, n, \varepsilon') \le N_{d_X}(f, n, \varepsilon) \Rightarrow h(g) \le h(f)$.

Andererseits ist $G \subset Y$ eine (n,ε')-Überdeckung für Y, so ist $k^{-1}(G) \subset X$ eine (n,ε'')-Überdeckung für X für ein $\varepsilon'' > 0$. Daraus folgt

$$N_{d_X}(f, n, \varepsilon'') \le N_{d_Y}(g, n, \varepsilon') \quad \Rightarrow \quad h(f) \le h(g).$$

$\blacksquare$

Satz 2.2.7 Die topologische Entropie h hat folgende Eigenschaften:

(i) $h(f) \geq 0 \quad \forall f$.

(ii) $h(Id) = 0$.

(iii) Ist $\Lambda \subset X$ abgeschlossen und f-invariant, so gilt $h(f|_\Lambda) \le h(f)$.

(iv) Ist $X = \bigcup_{i=1}^{m} \Lambda_i$, wobei jedes Λ_i abgeschlossen und f-invariant sei, so ist
$$h(f) = \max_{1 \le i \le m} h(f|_{\Lambda_i}).$$

(v) $h(f^m) = m \cdot h(f)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

(vi) Ist f invertierbar, so ist $h(f^{-1}) = h(f)$.

(vii) $h(f \times g) = h(f) + h(g)$, wobei $f: X \to X$, $g: Y \to Y$, $f \times g: X \times Y \to X \times Y$, $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$

Bw (i) — (iii) Aufgabe

(iv) Ist F_i eine (n,ε)-Überdeckung für Λ_i für $i=1,2,\dots,m$, so ist $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ eine (n,ε)-Überdeckung für X. Folglich ist

$$N_d(f,n,\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{m} N_d(f|_{\Lambda_i}, n, \varepsilon)$$

Es gibt dann mindestens einen Summanden i mit

$$(*) \qquad N_d(f|_{\Lambda_i}, n, \varepsilon) \geq \frac{1}{m} N_d(f,n,\varepsilon).$$

Da nur endlich viele i's gibt, erhält man $(*)$ für ein i für unendlich viele n. Daher ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_d(f|_{\Lambda_i}, n, \varepsilon)}{n} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_d(f,n,\varepsilon) - \log m}{n} = h_d(f,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad h_d(f|_{\Lambda_i}, \varepsilon) \geq h_d(f,\varepsilon) \Rightarrow h(f|_{\Lambda_i}) \geq h(f) \overset{(iii)}{\Longrightarrow} h(f|_{\Lambda_i}) = h(f).$$

$\square$ (iv)

(v) Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $x,y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_{f^m}^{n}(x,y) = \max_{0\leq i\leq n-1} d(f^{mi}(x), f^{mi}(y)) \leq \max_{0\leq i\leq mn-1} d(f^i(x), f^i(y)) = d_f^{mn}(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad B_{d_f^{mn}}(x;\varepsilon) \subset B_{d_{f^m}^{n}}(x;\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad N_d(f^m, n, \varepsilon) \leq N_d(f, mn, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad h_d(f^m,\varepsilon) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_d(f^m,n,\varepsilon)}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_d(f,mn,\varepsilon)}{mn}\cdot m = m h_d(f,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad h(f^m) \leq m h(f).$$

Andererseits zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ s.d.

$$\forall_{x\in X}, \quad B_d(x;\delta) \subset B_{d_f^m}(x;\varepsilon)$$

(wegen der Kompaktheit von X)

$$\Rightarrow \quad B_{d_{f^m}^{n}}(x;\delta) \subset B_{d_f^{mn}}(x;\varepsilon) \Rightarrow N_d(f,mn,\varepsilon) \leq N_d(f^m,n,\delta)$$

$$\Rightarrow h(f^m) \geq m\, h(f).$$

$\square$ (v)

(vi) Sei f invertierbar. Für $x,y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_f^n(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y)) = \max_{0\le i\le n-1} d\left(f^{-i} f^{n-1}(x), f^{-i} f^{n-1}(y)\right) = d^n_{f^{-1}}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))$$

Ist $F \subset X$ eine (n,ε)-Überdeckung für X bzgl. d_f^n, so ist $f^{n-1}(F)$ eine (n,ε)-Überdeckung für X bzgl. $d^n_{f^{-1}}$.

$\Rightarrow$ $N_d(f,n,\varepsilon) \geq N_d(f^{-1},n,\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $h(f) \geq h(f^{-1})$.

Vertauschen von f und f^{-1} beweist (vi) $\square$

(vii) Ist $F \subset X$ eine (n,ε)-Überdeckung für X und $G \subset Y$ eine (n,ε')-Überdeckung für Y, so ist $F \times G \subset X \times Y$ eine $(n, \varepsilon+\varepsilon')$-Überdeckung für $X \times Y$, wobei $d_{X,Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$.

$\Rightarrow$ $h(f \times g) = h(f) + h(g)$.

$\square$ (vii)

Satz 2.2.8 Ist $f: S^1 \to S^1$ ein Kreishomöomorphismus, so ist $h(f)=0$.

Bw. Sei d eine Metrik auf S^1 s.d. S^1 der Länge 1 ist. Wähle $\varepsilon > 0$ s.d.

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{-1}x, f^{-1}y) \leq \frac{1}{4}.$$

Sei $m := [\frac{1}{\varepsilon}]+1$ und $x_1, x_2, \dots, x_m$ seien auf S^1 gleichmäßig verteilt. Setze $E := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Dann ist E eine $(1,\varepsilon)$-Überdeckung für S^1. Folglich ist $N_d(f,1,\varepsilon) \leq m$. Wir zeigen $\underline{N_d(f,n,\varepsilon) \leq n\,m}$.

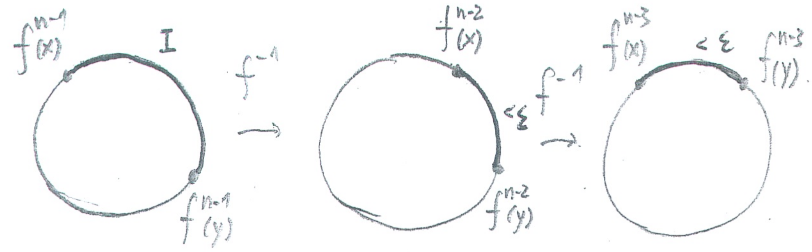
Sei F eine $(n-1,\varepsilon)$-Überdeckung für S^1 der mindesten Elemente und setze

$$F' := F \cup f^{-(n-1)}E.$$

Wir zeigen F' ist eine (n,ε)-Überdeckung für S^1. Sei $x \in S^1$ und $y \in F$ mit

$$d_f^{n-1}(x,y) = \max_{0\le i\le n-2} d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon.$$

Ist $d_f^n(x,y) \leq \varepsilon$, so ist x von F überdeckt. Angenommen $d_f^n(x,y) > \varepsilon$.



Da $d_f^{n-1}(x,y) \leq \varepsilon$ ist, ist $d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)) \leq \varepsilon$ und $d(f^{n-3}(x), f^{n-3}(y)) \leq \varepsilon$.

Wähle $\tilde{z} \in I \cap E$ s.d. $d(f^{n-1}(x), \tilde{z}) \leq \varepsilon$. Sei $z := f^{-(n-1)}\tilde{z} \in f^{-(n-1)}E$.

das Interval s.d. $f^{-1}(I)$ der Länge $\leq \varepsilon$ ist.

Dann ist $d(f^{n-1}(x), \tilde{z}) = d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z)) \leq \varepsilon$. Induktiv zeigt man

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leq \varepsilon \quad \forall_{0 \leq i \leq n-1}$$

$\Rightarrow$ F' ist eine (n,ε)-Überdeckung für S^1.

$\Rightarrow$ $N_d(f,n,\varepsilon) \leq nm$. $\Rightarrow$ $h_d(f,\varepsilon) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\log N_d(f,n,\varepsilon)}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\log nm}{n} = 0$

$\Rightarrow$ $h(f) = 0$.

$\boxtimes$

<u>Satz</u> 2.2.9 (Misiurewicz-Przytycki) Ist $f: X \to X$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X, so ist

$$h(f) \geq \log|\deg f|.$$

<u>Bw</u>. ausgelassen.

<u>Satz</u> 2.2.10 Sei X eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist $f: X \to X$ eine differenzierbare Abbildung, so ist

$$h(f) \leq \max\{0,\ n \log(\sup_{x\in X} \|d_x f\|)\}.$$