

Satz 2.1.11 Sei $h: [0,1] \times M \rightarrow N$ eine C^1 -Homotopie und $y \in N$ ein reg. Wert von h . Dann gilt

$$\deg(h(t, \cdot), y) \equiv \text{Konst} \quad \forall t \in [0,1].$$

Bw Aufgabe.

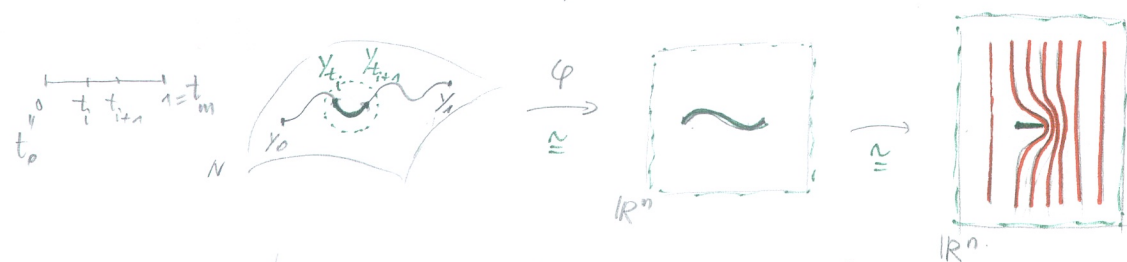
Korollar 2.1.12 Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^1 -Abb, wobei M kompakt und N zusammenhängend ist. Dann gilt

$$\deg(f, y) \equiv \text{Konst} \quad \text{für alle reg. Werte } y \in N \text{ von } f.$$

Bw. Seien $y_0, y_1 \in N$ reguläre Werte von f . Da N zusammenhängend ist, gibt es einen C^0 -Weg $\sigma: [0,1] \rightarrow N$ mit $\sigma(0) = y_0, \sigma(1) = y_1$

Weiter gibt es eine C^1 -Abb. $h: [0,1] \times N \rightarrow N$ mit $h(0) = \text{Id}_N$ und

$$h(t, y_0) = \sigma(t), t \in [0,1]. \quad \uparrow \text{ Ist } h_i: [0,1] \times N \rightarrow N \text{ mit } h_i(0) = \text{Id}_N \text{ und}$$



$$h_i(t, y_{t_i}) = \sigma(t_i + (t_{i+1} - t_i)t) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, m-1, \text{ so ist}$$

$$h: [0,1] \times N \rightarrow N \text{ mit } h := h_{m-1} \circ h_{m-2} \circ \dots \circ h_0 \text{ wie gewünscht.}$$

Definiere $\tilde{h}: [0,1] \times M \rightarrow N$ durch $\tilde{h}(t, x) := h(t, f(x))$. Dann ist $\tilde{h}(0, x) = h(0, f(x)) = f(x)$ und $\tilde{h}(1, x) = h(1, f(x)) =: g(x)$. Wähle h s.d. y_1 ein reg. Wert von \tilde{h} ist. Wegen Satz 2.1.11, ist

$$\deg(h(0, \cdot), y_1) = \deg(h(1, \cdot), y_1)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel g(x) = y_1 \Leftrightarrow f(x) = y_0 \\ \deg(f, y_1) & & \deg(f, y_0) \end{array}$$

□

Def. 2.1.13 Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension n .
Es sei M kompakt ohne Rand und N zusammenhängend. Für C^1 -Abb
 $f: M \rightarrow N$, definiere den Abbildungsgrad von f durch

$$\deg(f) := \deg(f, y),$$

wobei $y \in N$ ein reg. Wert von f ist.

Satz 2.1.14 Sei $f: M \rightarrow N$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine C^1 -Abb
 $g: M \rightarrow N$ mit $\|f - g\|_{C(M;N)} < \varepsilon$.

Def. 2.1.15 Ist $f: M \rightarrow N$ stetig, so setzen wir den Abbildungsgrad von f
(*) $\deg(f) := \deg(g)$,

wobei $g: M \rightarrow N$ eine C^1 -Abb. ist, die hinreichend nahe bei f gewählt wird.

Bemerkung 2.1.16 (*) ist wohldefiniert. Seien $g_1, g_2 \in C^1(M; N)$
mit $\|g_1 - g_2\|_{C(M;N)} < \varepsilon$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Dann sind g_1, g_2
homotop in $C^1(M; N)$ dadurch, dass wir Werte $g_1(x)$ und $g_2(x)$ mit
 C^1 -Kurven verbinden, die glatt von $g_1(x), g_2(x)$ abhängen (als Lösungen
von Differentialgleichungen mit glatten Vektorfeldern).

Satz 2.1.17 Seien M, N, P orientierte, kompakte, zusammenhängende
Mannigfaltigkeiten der Dimension n . Sind $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$
stetige Abbildungen, so ist $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Bw ähnlich wie Satz 2.1.6.

□

2.1.17

Man erinnere sich an der Definition des Abbildungsgrad für Kreisabbildungen $f: S^1 \rightarrow S^1$ (vgl. Def. 1.2.4), wobei $\deg(f)$ durch einen Lift $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f definiert ist, d.h. $\deg(f) = F(x+1) - F(x)$.
Wir zeigen die zwei Definitionen (Def. 2.1.13 und Def. 1.2.4) sind für Kreisabbildungen gleich.

Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ stetig und $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von f . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow \times & & \downarrow F(x) \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ z = e^{2\pi i x} & & f(z) \end{array} \quad f(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i F(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Es genügt zu zeigen:
 $\text{Deg}(f) = F(1) - F(0)$.

- Ist $F(1) = F(0)$, so ist $F \equiv \text{const}$ (da F monoton ist) und folglich ist $f \equiv \text{const} \Rightarrow \text{Deg}(f) = 0$. ✓
- Ist $F(1) > F(0)$, so ist $F: [0,1] \rightarrow [F(0), F(1)]$ monoton steigend.

Gegeben sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $a < b$. Definiere eine "Äquivalenzrelation" \sim auf $[a,b]$: $x \sim y \Leftrightarrow x=y$ oder $x=a, y=b$ oder $x=b, y=a$

Man zeigt $[a,b] / \sim \cong_{C^\infty\text{-Diffeo.}} S^1$ durch $\varphi: [a,b] \rightarrow S^1$

$$\varphi(x) := e^{2\pi i \frac{x-a}{b-a}}$$

Hilfsatz 2.1.18 Ist $b-a \in \mathbb{N}$, so ist $C_{a,b}: [a,b] / \sim \rightarrow S^1$ mit

$$C_{a,b}(x) := e^{2\pi i x}$$

wohldefiniert und $\text{Deg}(C) = b-a$.

Bw. $[a,b] / \sim \xrightarrow{\varphi} S^1 \xrightarrow{\tilde{C}} S^1$ Sei $\tilde{C}: S^1 \rightarrow S^1$ mit $\tilde{C}(z) = z^{b-a}$ (2.1.17)
 $x \mapsto e^{2\pi i \frac{x-a}{b-a}} \mapsto e^{2\pi i x}$ Dann ist $\text{Deg}(\tilde{C}) = \text{Deg}(z \mapsto z^{b-a}) = b-a$

$$\Rightarrow \text{Deg}(C) = \text{Deg}(\tilde{C} \circ \varphi) \stackrel{2.1.17}{=} \text{Deg}(\tilde{C}) \cdot \text{Deg}(\varphi) = \text{Deg}(\tilde{C}) = b-a$$

(da φ homeom.)

Betrachte $[0, 1] \xrightarrow{F} [F(0), F(1)] =: [a, b]$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow C_{0,1} = e^{2\pi i \cdot} & & \downarrow C_{a,b} = e^{2\pi i \cdot} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Da $f(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i F(x)}$ ist, ist $f \circ C_{0,1} = C_{a,b} \circ F : [0, 1] \rightarrow S^1$

eine (glatte) Abbildung von einer kompakten MfK $[0, 1]$ nach einer zusammenhängenden MfK S^1 . Daher ist

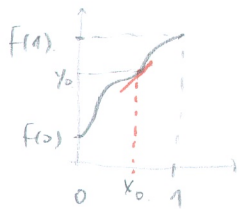
$$\text{Deg}(f \circ C_{0,1}) = \text{Deg}(C_{a,b} \circ F) \quad \text{wohldefiniert und}$$

\parallel 2.1.17

\parallel 2.1.17

$$\text{Deg}(f) \cdot \text{Deg}(C_{0,1}) = \text{Deg}(C_{a,b}) \cdot \text{Deg}(F)$$

Folglich ist $\text{Deg}(f) = (b-a) \cdot \text{Deg}(F)$. Andererseits ist $\text{Deg}(F) = 1$,



da F monoton steigend ist.

Sei y_0 ein regulärer Wert von F . Dann hat y_0 ein einziges

Urbild, $F^{-1}(y_0) = \{x_0\}$, für $x_0 \in [0, 1]$, und $F'(x_0) > 0 \Rightarrow$

$$\text{Deg}(F) = \text{Deg}(F, y_0) = \text{sgndet } F'(x_0) = 1.$$

Daraus folgt $\text{Deg}(f) = b-a = F(1) - F(0)$.



$$\begin{array}{l} \text{Deg}(f) = \text{dg}(f) \\ f: S^1 \rightarrow S^1 \end{array}$$

2.1.3 Periodische Punkte auf der Riemann-Kugel

In diesem kurzen Unterabschnitt wollen wir Beispiele von Dynamiken auf der Riemannschen Zahlenkugel untersuchen.

Def. 2.1.19 Die Riemannsche Zahlenkugel besteht aus der Einpunktkompaktifizierung \mathbb{C}^* von \mathbb{C} . Die Topologie \mathcal{T} auf \mathbb{C}^* besteht aus den üblichen offenen Mengen in \mathbb{C} und den Komplementen der Kompakta (dies sind gerade die Umgebungen von ∞). Man zeige \mathbb{C}^* ist ein topologischer Raum bezüglich \mathcal{T} (Aufgabe).

Ein Atlas auf \mathbb{C}^* besteht aus den beiden Abbildungen

$$\varphi_1: U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto z$$

$$\varphi_2: U_2 := \mathbb{C}^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C} \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

Man zeige \mathbb{C}^* ist eine glatte ori. Mannigfaltigkeit unter dem Atlas. Aufgabe.

Beispiel 2.1.20 Die Abbildung $z \mapsto z^2$.

Man betrachte die Abbildung $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $f(z) := \begin{cases} z^2 & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \end{cases}$.

Man zeige $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist glatt. Da \mathbb{C}^* zusammenhängend ist, ist $\deg(f)$ dann wohldefiniert. Wir zeigen 1 ist ein reg. Wert von f und $\deg(f) = \deg(f, 1) = 2$. Man sieht $f^{-1}(1) = \{\pm 1\}$, und die lokale

$$\begin{array}{ccc} \pm 1 \in U_1 & \xrightarrow{f} & U_1 \ni 1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$$

Darstellung $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um ± 1 ist

$$\hat{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Daher ist $D\hat{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ und folglich ist

$$\text{der lokale Index } \varepsilon_{+1} = \text{sign det } D\hat{f} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 1,$$

$$\varepsilon_{-1} = \text{sign det } D\hat{f} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 1. \text{ Daraus folgt } \boxed{\deg(f) = 2}.$$

Die Fixpunkte von f sind $0, 1, \infty$, wobei 0 und ∞ asymptotisch stabile Fixpunkte sind und 1 instabil ist.

Der Äquator $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ ist invariant, die Einschränkung von f auf S^1 ist $f: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$. Periodische Orbits für f liegen auf S^1 . Die Anzahl der per. Orbits ist

$$P_n(f) = 2 + \underbrace{\left| \{z \in S^1 : z^{2^n} = z\} \right|}_{\leftarrow 0, \infty} = \left| \{z \in S^1 : z^{2^n-1} = 1\} \right| + 2 = 2^{n-1} + 2 = 2^n + 1.$$

Asymptotisch wächst $P_n(f)$ wie $\deg(f)^n = 2^n$.

Beispiel 2.1.21. Die Abbildung $z \mapsto z^2/|z|$

Dieses Beispiel dient zu zeigen, dass man nicht schon allein aus dem Abbildungsgrad schließen kann, dass die Dynamik kompliziert ist.

Betrachte $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2/|z|$ und setze diese auf \mathbb{C}^* :

$$g(z) = \begin{cases} z^2/|z| & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \end{cases}$$

$g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ hat 2 Fixpunkte: $0, \infty$.

Man zeigt:

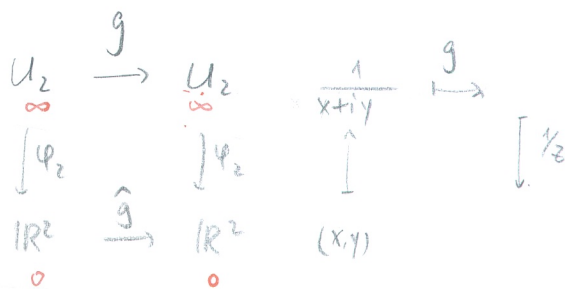
(i) g ist bei $z = \infty$ nicht glatt.

$$\hat{g}(x,y) = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_2^{-1}(x,y) = \varphi_2 \circ g \left(\frac{1}{x+iy} \right) = \varphi_2 \left(\frac{1}{(x+iy)^2} \cdot \frac{1}{|x+iy|} \right) = \frac{z(x+iy)^2}{|x+iy|}$$

$$= \left(\frac{2(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \quad \hat{g} \text{ is nicht glatt um } (x,y) = (0,0).$$

(ii) $\deg(g) = 2$.

$$\deg(g) = \deg(g, 1), \quad g^{-1}(1) = \{\pm 2\}.$$



$$\pm 2 \leftarrow U_1 \xrightarrow{g} U_1$$

$$\downarrow \varphi_1 \quad \downarrow \varphi_1$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\hat{g}} \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \quad \left(\frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\hat{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial (x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{2x \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{4(x^2 + y^2)} & \frac{-2y \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y}{4(x^2 + y^2)} \\ \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2 + y^2} & \frac{x\sqrt{x^2 + y^2} - xy \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Ist $x=2, y=0$, so ist $\det \frac{\partial \hat{g}}{\partial (x, y)} \Big|_{(2,0)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/2 > 0$

Ist $x=-2, y=0$, so ist $\det \frac{\partial \hat{g}}{\partial (x, y)} \Big|_{(-2,0)} = \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1/2 > 0$

Daraus folgt, dass 1 ein regulärer Wert von g ist und $\deg(g, 1) = 1+1=2$.

(iii) $P_n(g) = 2$.

Da $|g(z)| = \frac{|z|^2}{2|z|} = \frac{|z|^2}{2|z|} = \frac{|z|}{2} < |z|$ ist, hat $g(z)$ keine invariante Menge außer Fixpunkte $z=0, \infty$. Daher ist

$$P_n(g) = |\{z: g^n(z) = z\}| = |\{0, \infty\}| = 2.$$

(iv) Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $g^n(z_0)$ gegen 0.

$$|g^n(z_0)| = \frac{|g^{n-1}(z_0)|}{2} = \dots = \frac{|z_0|}{2^n} \rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Bemerkung 2.1.21 Man erinnere sich am Satz

1.3.2: ist $f: S^1 \rightarrow S^1$, so ist $P_n(f) \geq \deg(f)^n - 1$. (*)

Beispiel 2.1.20 zeigt, dass (*) im Allgemeinen nicht wahr ist, für $f: M \rightarrow N$, $\dim M = \dim N$,

M kompakt, N zusammenhängend.

