Dynamische Systeme WS 2010/11

1. Kreisabbildungen und Topologische Aspekte

1.1. Dynamische Systeme

"Dynamische Systeme" beschreiben zeitliche Vorgänge.

Entsprechend der Zeitmenge, die diskret bzw. stetig ist, nennt man die dynamische Systeme diskret bzw. stetig.

Gewöhnte Zeitmengen sind

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}^+,$$

wobei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{Z}^+ := \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \geq 0\}$.

Definition 1.1.1 Ein dynamische System auf X ist eine stetige Abbildung $\Phi : X \times \mathbb{T} \to X$ s.d.

- $\Phi(x, s+t) = \Phi(\Phi(x,s), t) \quad \forall x \in X,\ s,t \in \mathbb{T}$,
- $\Phi(x, 0) = x$

wobei X ein topologischer Raum, $\mathbb{T}$ eine Zeitmenge ist.

Ist $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$, nennen wir Φ ein Fluss;

Ist $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+\}$, nennen wir Φ ein Halbfluss.

Beispiele 1.1.2 (a) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$, $f : X \to X$ stetig. Definiere

$$\Phi(x, n) := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ Mal}}(x) =: f^n(x) \quad \forall n \geq 1.$$

(b) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, X eine kompakte Mannigfaltigkeit, $v : X \to TX$ Lipschitz stetig mit $\pi \circ v = id_X$, wobei $\pi : TX \to X$ kanonische Projektion.

Dann erzeugt v einen Fluss $\Phi(x,t)$ auf X.

Definition 1.1.3 Sei $x \in X$. Die Menge

$$\mathcal{O}(x) := \{ \Phi(x,t) : t \in \mathbb{T} \}$$

nennt man den Orbit von x. Ist $\mathcal{O}(x) = \{x\}$, so ist x eine Ruhelage oder ein Gleichgewicht; Ist $\mathcal{O}(x)$ kompakt, so ist der Orbit periodisch. Ein $T \in \mathbb{T}$ mit

$$\Phi(y,T) = y \quad , \quad y \in \mathcal{O}(x)$$

heißt eine Periode des Orbits. Periodische Orbits und Gleichgewichte werden als singuläre Orbits bezeichnet.

1.2. Kreisabbildungen und Abbildungsgrad

$$S^1 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

bezeichnet den Einheitskreis. Wir betrachten stetigen Abbildungen

$$f : S^1 \to S^1$$

und wollen $\{ f^n(z) : n \in \mathbb{T}, z \in S^1 \}$ als ein dynamisches System untersuchen. Dabei benötigen wir ein Hilfsmittel:

Definition 1.2.1 Sei $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch

$$\pi(x) := e^{2\pi i x}.$$

Ein Lift von $f : S^1 \to S^1$ ist eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.d.

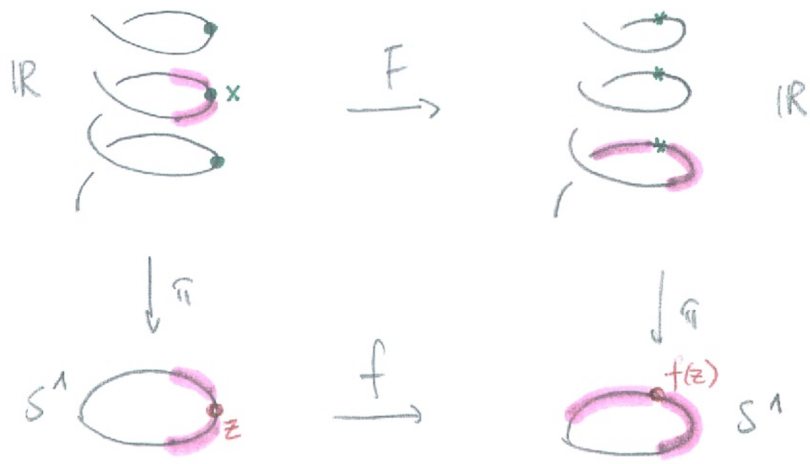
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

ein kommutatives Diagram ist,

d.h. $f \circ \pi = \pi \circ F$.

Satz 1.2.2 Jede stetige Abbildung $f: S^1 \to S^1$ besitzt einen Lift.

Bw



- π ist ein lokales Homöomorphismus, d.h.

$$\forall \delta_1 < \tfrac{1}{2} \quad \exists! \, \delta < 2 \text{ s.d. } \pi : B_{\delta_1}(x) \to B_\delta(\pi(x)) \text{ ist homöom,}$$

wobei die Metrik auf S^1 die reduzierte Metrik von $\mathbb{C}$ ist, d.h.

$$d(z, z') := |z - z'| \quad , \quad z, z' \in S^1$$

- f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon < 1 \quad \exists \, \delta < 2 \text{ s.d. } |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon < 1.$$

Sei nun $\varepsilon, \delta, \delta_1$ festgewählt. Definiere

$$F(x) := \pi^{-1} \circ f \circ \pi(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

z.Z. <u>F ist stetig</u>:

$$\forall x' \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x'| < \delta_1 \overset{\pi \text{ lokal. Homöom}}{\Longrightarrow} |\pi(x') - \pi(x)| < \delta \Rightarrow |f(\pi(x')) - f(\pi(x))| < \varepsilon < 1$$

$$\overset{\pi^{-1} \text{ lokal. Homöom}}{\Longrightarrow} \quad |\pi^{-1}(f(\pi(x'))) - \pi^{-1}(f(\pi(x)))| \text{ ausreichend klein.}$$

$\square$ 1.2.2

Hausaufgabe 1. Ist f ein Homöomorphismus, so gilt dies auch für F.

Hausaufgabe 2. Konstruiere einen Lift von

$$f : S^1 \to S^1 , \quad z \mapsto z^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Wie viele Lifte können Sie finden?

Satz 1.2.3 Seien $f : S^1 \to S^1$ stetig und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lift von f.
Dann ist

$$F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}.$$

Weiter ist die Zahl von x und vom Lift F unabhängig.

Bw $\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$, aber $\pi(x) = e^{2\pi i x}$

$\Rightarrow F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}.$

Aus der Stetigkeit von F folgt dann die Unabhängigkeit der Zahl von x.

Sei F' ein anderer Lift von f.

$$\pi \circ F = f \circ \pi = \pi \circ F' \Rightarrow F - F' \in \mathbb{Z} \Rightarrow F - F' \text{ ist konstant.}$$

Daher ist

$$F(x+1) - F(x) = F'(x+1) - F'(x)$$

$\boxed{\Sigma}$ 1.2.3

Definition 1.2.4 Die ganze Zahl $F(x+1) - F(x)$ nennt man den Abbildungsgrad von f und wird als $\deg(f)$ bezeichnet.

Satz 1.2.5 Die Abbildung $\deg: C(S^1, S^1) \to \mathbb{Z}$ ist stetig.
$$f \longmapsto \deg(f)$$

Bw Seien $f, g \in C(S^1, S^1)$, F bzw. G ein Lift von f bzw. g.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \circ F = f \circ \pi \\ \pi \circ G = g \circ \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \circ (F - G) = (f - g) \circ \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ ist ein lokales Homöom.} \overset{B_{\delta_1}(x) \to B_\delta(\pi(x))}{} \\ S^1 \text{ ist kompakt.} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ist } |f - g| < \delta < 2 \\ \text{So ist } |F - G| < \delta_1 < \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow |\deg(f) - \deg(g)| = |F(x+1) - F(x) - G(x+1) + G(x)| < 2\delta_1 < 1$$

$$\overset{\deg(\cdot) \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \deg(f) = \deg(g)$$

$\boxed{\Xi}$ 1.2.5

Definition 1.2.6 Zwei stetige Abbildungen $f, g: S^1 \to S^1$ heißen <u>homotop</u>, falls es eine stetige Abbildung
$$H: [0,1] \times S^1 \to S^1$$
gibt mit $H(0, \cdot) = f$ und $H(1, \cdot) = g$.
Die Abbildung H heißt eine <u>Homotopie</u> von f nach g

- Der Begriff der Homotopie kann man gleichlautend für alle topologischen Räume und alle stetige Abbildungen darauf definieren.
- Homotopie ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.