Dr. Haibo Ruan WS 2010

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 7

Aufgabe 31 (5 Punkte) Sei A eine nichtsinguläre $n\times n$-Matrix und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ die negativen Eigenwerte von A und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ihre Vielfachheiten als Nullstellen von $\det(A - \lambda \mathrm{Id}\,) = 0$. Setze $\alpha := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$.
Zeigen Sie:

$$A \text{ ist homotop zu} \begin{cases} \mathrm{diag}[1, 1, \cdots, 1], & \text{für gerades } \alpha, \\ \mathrm{diag}[-1, 1, \cdots, 1], & \text{für ungerades } \alpha, \end{cases}$$

(ohne den Abbildungsgrad zu nutzen).
Hinweis. Sind A und α wie gegeben, so lässt sich $\mathbb{R}^n$ als eine direkte Summe zweier Teilvektorräume N und M darstellen, $\mathbb{R}^n = N \oplus M$, sodass

(a) N und M invariant unter A sind;

(b) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sind Eigenwerte von $A|_N$ und $A|_M$ hat keine negativen Eigenwerte;

(c) $\dim N = \alpha$.

Man zeigt $A|_M$ ist homotop zur Identität; $A|_N$ ist homotop zur Identität durch Rotation wenn α gerade ist, und homotop zu $\mathrm{diag}[-1, 1, \cdots, 1]$, wenn α ungerade ist.

Aufgabe 32 (10 Punkte) Die Riemannsche Zahlenkugel besteht aus der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{C}^*$ von $\mathbb{C}$. Die Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{C}^*$ besteht aus den üblichen offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und den Komplementen der Kompakta (dies sind gerade die Umgebungen von ∞). Definiere zwei Abbildungen

$$\varphi_1 : U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto z$$

$$\varphi_2 : U_2 := \mathbb{C}^* \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{wenn } z \in \mathbb{C}, \\ 0, & \text{wenn } z = \infty. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) $\mathbb{C}^*$ ist ein topologischer Raum bezüglich $\mathcal{T}$;

(b) $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ist ein Atlas auf $\mathbb{C}^*$;

(c) $\mathbb{C}^*$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit unter dem Atlas $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$;

(d) $\mathbb{C}^*$ ist eine orientierte Mannigfaltigkeit unter $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$.

Abgabe: 31.1.2011