Dr. Haibo Ruan WS 2010

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 6

Aufgabe 27 (5 Punkte) Mann erinnere sich an dem Satz von impliziten Funktionen: Seien m, n natürliche Zahlen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung mit $r \geq 1$, definiert auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Ist y ein regulärer Wert von f (d.h. die Ableitung $Df(x)$ hat für alle $x \in f^{-1}(y)$ den Rang n), so ist $M := f^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$ der Dimension m. Insbesondere ist M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m, wenn M sich als ein Urbild eines regulären Wertes einer glatten Abbildung $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ darstellen lässt.
Beweisen Sie nun mit der Hilfe dieses Satzes, dass

$$S^m : \{(x_0, x_1, \ldots, x_m)^T \; : \; x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 28 (5 Punkte) Seien $\deg_a$ und $\deg_c$ die Funktionen, die im Unterabschnitt 2.1.1 vom Vorlesungsskript gegeben sind.
Beweisen Sie, dass die Funktion $\deg_c$ die Eigenschaft (E2) aus dem Satz 2.1.1 erfüllt, wenn (E2) für $\deg_a$ gilt.

Aufgabe 29 (5 Punkte) Es sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen in $\mathbb{R}^n$. Auf $\mathcal{B}$ definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$: zwei Basen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ sind *äquivalent*, mit $B_1 \sim B_2$ bezeichnet, wenn die Transformationsmatrix P zum Basiswechsel von B_1 nach B_2 positive Determinante hat. Beweisen Sie:

(a) Es gibt zwei Äquivalenzklassen in $\mathcal{B}$;

(b) Ist $\mathcal{B}$ als eine Teilmenge vom Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen mit der üblichen Topologie betrachtet, so hat $\mathcal{B}$ zwei Zusammenhangskomponente und diese zwei Zusammenhangskomponente entsprechen genau den zwei Äquivalenzklassen in $\mathcal{B}$.

Aufgabe 30 (5 Punkte) Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension n, M sei kompakt ohne Rand, N sei zusammenhängend. Sei $h : [0, 1] \times M \to N$ eine C^1-Homotopie und $y \in N$ ein regulärer Wert von h. Dann ist

$$\deg(h(t, \cdot), y) \equiv \text{konst}, \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Abgabe: 10.1.2011