Dr. Haibo Ruan WS 2010

Übungen zu Dynamische Systeme
Blatt 5

Bezeichungen: Ist X ein metrischer Raum mit der Metrik d, so ist der Abstand von Mengen $A, B \subset X$ mit $\rho(A, B) := \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y)$ bezeichnet. Die Menge aller stetigen Abbildungen von einer offenen beschränkten Teilmenge $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ wird mit $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ bezeichnet und als einen normierten Raum mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$ betrachtet.

Aufgabe 21 (5 Punkte) Beweisen Sie, dass die beide Definitionen der Ordnungsrelation "$\prec$" auf der Menge der orientierungserhaltenden Homöomorphismen des Kreises S^1 äquivalent sind (vgl. Def 1.3.37 und Def 1.3.38).

Aufgabe 22 (5 Punkte) Beweisen Sie, dass die Ordnungsrelation "$\prec$" nicht transitiv ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte) Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Ist jeder Punkt in S^1 ein periodischer Punkt von f, so ist die Rotationszahl um f streng steigend, d.h. ist $f_0 \prec f \prec f_1$, so ist $\tau(f_0) < \tau(f) < \tau(f_1)$.

Aufgabe 24 (5 Punkte) Sei f der C^1-Diffeomorphismus im Beweis von Satz 1.3.33 mit $\tau(f) = \tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Definieren Sie eine stetige, monotone surjektive Abbildung $h : S^1 \to S^1$ sodass $h \circ f = R_\tau \circ h$, wobei R_τ die Rotation von τ bezeichnet.

Aufgabe 25 (5 Punkte) Seien $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $y_o \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ und $\delta := \rho(y_o, f(\partial\Omega))$. Beweisen Sie

$$\deg_a(f, \Omega, y) \equiv \text{konstant},$$

für alle regulären Werte $y \in B_\delta(y_o)$ von f, wobei $\deg_a$ die für C^1-Abbildungen und reguläre Werte definierte Funktion ist (vgl. Vorlesungsskript).
Hinweis: wenden Sie die Homotopieinvarianz von $\deg_a$.

Aufgabe 26 (5 Punkte) Seien $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ und $\delta < \rho(y, f(\partial\Omega))$. Beweisen Sie

$$\deg_b(g, \Omega, y) \equiv \text{konstant},$$

für alle C^1-Abbildungen $g \in B_\delta(f)$, wobei $\deg_b$ die für C^1-Abbildungen definierte Funktion ist (vgl. Vorlesungsskript).
Hinweis: wenden Sie die Homotopieinvarianz von $\deg_b$.

Abgabe: 13.12.2010