Dr. Haibo Ruan WS 2010

# Übungen zu Dynamische Systeme

## Blatt 4

**Aufgabe 15** (5 Punkte) Beweisen Sie:

(a) die Menge aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder nirgends dicht noch perfekt;

(b) die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist nirgends dicht und perfekt.
*Hinweis: jedes $x \in [0,1]$ lässt sich als einen Ternärkode darstellen, d.h. es gibt $\alpha_i \in \{0,1,2\}$ für $i \in \mathbb{N}$ sodass $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$. Beispiele sind $\frac{1}{3} = 0.02222\ldots$, $\frac{5}{8} = 0.121212\ldots$ und $\frac{2}{3} = 0.20000\ldots$. Unter dieser Darstellung ist die Cantormenge genau die Menge der Zahlen, die sich als Ternärkode ohne der Ziffer 1 schreiben lassen.*

**Aufgabe 16** (5 Punkte) Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus ohne periodischen Punkte. Beweisen Sie, dass die $\omega$-Grenzmenge $\omega(x)$ für jedes $x \in S^1$ perfekt ist.

**Aufgabe 17** (5 Punkte) Ist $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist jeder positiven Semiorbit von der Rotation $R_\tau$ dicht in $S^1$.

**Aufgabe 18** (5 Punkte) Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus mit rationaler Rotationszahl. Beweisen Sie:

(a) Ist $f$ konjugiert zu einer Rotation, so sind alle Orbits periodisch der gleichen Periode;

(b) Ist $f$ nur ein Faktor von einer Rotation, so hat $f$ unendliche vielen periodischen Orbits.

**Aufgabe 19** (5 Punkte) Sei $h : S^1 \to S^1$ ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus. Gilt $\tau(h^{-1} \circ f \circ h) = \tau(f)$ noch für alle orientierungserhaltende Homöomorphismus $f : S^1 \to S^1$?

**Aufgabe 20** (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die $n$-Sphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \, : \, \|x\| = 1\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
(*Hinweis:* wenden Sie die "stereografische Projektion" an.)

**Abgabe: 29.11.2010**