Dr. Haibo Ruan WS 2010

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 3

Aufgabe 9 (5 Punkte) Seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ die kanonische Projektion. Sei $z_i := \pi(\frac{ip}{q})$ für $i = 0, 1, \ldots, q-1$. Beweisen Sie:

(a) es gibt eine eizige ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq q-1$ und $kp \equiv 1 \pmod{q}$;

(b) die Ordnung von $(z_0, z_1, \ldots, z_{q-1})$ ist durch $\sigma(i) \equiv ki \pmod{q}$ gegeben.

Aufgabe 10 (5 Punkte) Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomophismus. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd, sodass es $x \in S^1$ gibt mit $f^q(x) = x$. Sei $\tilde{x} = \pi^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ ein Lift von x und F ein Lift von f sodass $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$. Setze

$$A := \pi^{-1}\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}.$$

Beweisen Sie, dass A $(pq+1)$ Punkte in $[\tilde{x}, \tilde{x}+p]$ liefert und F-invariant ist.

Aufgabe 11 (5 Punkte) Ist $I := [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f : I \to I$ eine nicht-fallende stetige Abbildung ohne Fixpunkte von (α, β), so ist ein Endpunkt γ von I ein Fixpunkt und alle Orbits außer des anderen Endpunktes (wenn der auch ein Fixpunkt ist) konvergieren gegen γ. Ist f invertierbar, so sind die beide Endpunkte Fixpunkte und alle Orbits von (α, β) sind heteroklin zu α und β.

Aufgabe 12 (5 Punkte) Sei $f : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung sodass

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x + \frac{1}{4}\sin^2(\pi x) \pmod{1}$$

ein Lift von f ist. Dann hat f einen einzigen periodischen Orbit und dieser Orbit ist semistabil.

Aufgabe 13 (5 Punkte) Sei F ein Lift einer Kreisabbildung. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, wessen Endpunkte nebenstehenden Nullstellen von $F^q - \mathrm{Id} - p$ sind, so hat $F^q - \mathrm{Id} - p$ das gleiche Vorzeichen auf I und $F(I)$.

Aufgabe 14 (5 Punkte) Sei F ein Lift eines orientierungserhaltenden Homöomorphismus $f : S^1 \to S^1$ mit Rotationszahl $\tau := \tau(F) \notin \mathbb{Q}$. Ist $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ für $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, so ist $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Abgabe: 15.11.2010